



**Математика для школьников 7 – 11 класса (заключительный этап)
 Вариант IV. Решения**

Решение задачи 1. Нанонить (8 баллов)

- а) Поскольку плотность материала не меняется, то при вытягивании нанонити объем вольфрама постоянен:

$$V = \pi d_1^2 L_1 / 4 = \pi d_2^2 L_2 / 4.$$

Отсюда

$$L_2 / L_1 = d_1^2 / d_2^2 = 2116.$$

- б) Полагая, что и для проволоки, и для нанонити $L \gg d$, получаем, что площадь поверхности приблизительно равна площади боковой поверхности соответствующего цилиндра:

$$S = \pi dL.$$

Тогда

$$S_2 / S_1 = d_2 L_2 / d_1 L_1 = d_2 / d_1 \cdot L_2 / L_1 = d_2 / d_1 \cdot d_1^2 / d_2^2 = d_1 / d_2 = 46.$$

Решение задачи 2. Тетраэдрические матрешки (8 баллов)

Запишем в общем виде уравнение, связывающее число атомов в матрешке и изомерном ей фуллерене:

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 &= N_3 \\ 4(n_1^2 + n_1 m_1 + m_1^2) - 8 + 4(n_2^2 + n_2 m_2 + m_2^2) - 8 &= 4(n_3^2 + n_3 m_3 + m_3^2) - 8 \\ 4(n^2 + n \cdot n + n^2) - 8 + 4((n+1)^2 + (n+1)(n+1) + (n+1)^2) - 8 &= 4(x^2 + xy + y^2) - 8 \\ 12n^2 + 12(n+1)^2 - 16 &= 4(x^2 + xy + y^2) - 8 \\ 24n^2 + 24n - 4 &= 4(x^2 + xy + y^2) - 8 \\ 6n^2 + 6n + 1 &= x^2 + xy + y^2 \end{aligned}$$

Запишем и решим систему уравнений:

$$\begin{aligned} 6n^2 + 6n + 1 &= x^2 + xy + y^2 \\ x + y &= 3n - 1 \\ x - y &= 11 \end{aligned}$$

Выразим x и y через n :

$$\begin{aligned} 6n^2 + 6n + 1 &= (x + y)^2 - xy \\ x &= 1,5n + 5 \\ y &= 1,5n - 6 \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в первое уравнение системы, получаем:

$$\begin{aligned}6n^2 + 6n + 1 &= (3n - 1)^2 - (1,5n + 5)(1,5n - 6) \\24n^2 + 24n + 4 &= 36n^2 - 24n + 4 - (3n + 10)(3n - 12) \\12n^2 - 48n - 9n^2 + 6n + 120 &= 0 \\3n^2 - 42n + 120 &= 0 \\n^2 - 14n + 40 &= 0\end{aligned}$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим:

$$\begin{aligned}n &= (14 \pm 6)/2 \\n &= 10 \text{ или } n = 4.\end{aligned}$$

Тогда $x = 20$, $y = 9$ или $x = 11$, $y = 0$.

Решение задачи 3. Мозаика вирусного капсида (8 баллов)

Поскольку поверхность капсида можно представить как многогранник, гранями которого являются пяти-, шести- и семиугольники, сходящиеся в вершине по 3, то к нему применима теорема Эйлера для выпуклых многогранников:

$$V - E + F = 2.$$

Число граней такого многогранника равно числу групп элементов:

$$F = G = G_5 + G_6 + G_7.$$

Общее число элементов в капсиде при этом равно

$$N = 5G_5 + 6G_6 + 7G_7.$$

Число вершин:

$$V = 5/3G_5 + 6/3G_6 + 7/3G_7 = N/3.$$

Число ребер:

$$E = 5/2G_5 + 6/2G_6 + 7/2G_7 = N/2.$$

Тогда, с одной стороны,

$$\begin{aligned}N/3 - N/2 + G &= 2, \\N &= 6G - 12,\end{aligned}$$

а с другой

$$\begin{aligned}5/3G_5 + 6/3G_6 + 7/3G_7 - 5/2G_5 - 6/2G_6 - 7/2G_7 + G_5 + G_6 + G_7 &= 2 \\G_5 - G_7 &= 12.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} G &= 12 + G_6 + 2G_7 \\ G &= 12 + 1997 + 2 \cdot 6 = 2021 \\ \text{и } N &= 6(12 + G_6 + 2G_7) - 12 = 60 + 6G_6 + 12G_7 \\ N &= 60 + 6 \cdot 1997 + 12 \cdot 6 = 12114 \end{aligned}$$

Решение задачи 4. Адсорбент (8 баллов)

Запишем формулы для вычисления объема для каждой из фигур:

- куб $V_{\text{куб}} = A_{\text{куб}}^3$,
- октаэдр $V_{\text{окт}} = \sqrt{2}/3 A_{\text{окт}}^3$,
- «веретено» $V_{\text{веретено}} = V_{\text{куб}} + V_{\text{окт}} = (1 + \sqrt{2}/3) A_{\text{веретено}}^3$

а также площади поверхности для них:

- куб $S_{\text{куб}} = 6A_{\text{куб}}^2$,
- октаэдр $S_{\text{окт}} = 2\sqrt{3}A_{\text{окт}}^2$,
- «веретено» $S_{\text{веретено}} = (4 + 2\sqrt{3})A_{\text{веретено}}^2$

Тогда соотношение S/V для каждой из фигур:

- куб $S_{\text{куб}}/V_{\text{куб}} = 6/A_{\text{куб}}$,
- октаэдр $S_{\text{окт}}/V_{\text{окт}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}A_{\text{окт}}}$,
- «веретено» $S_{\text{веретено}}/V_{\text{веретено}} = \frac{12+6\sqrt{3}}{(3+\sqrt{2})A_{\text{веретено}}}$

Следовательно, длина стороны в каждом из случаев составляет

- куб $A_{\text{куб}} = \frac{6}{S/V} = 6/1,2 = 5 \text{ нм}$,
- октаэдр $A_{\text{окт}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}S/V} = 6 \cdot 1,7 / (1,4 \cdot 1,2) = 6,1 \text{ нм}$,
- «веретено» $A_{\text{веретено}} = \frac{12+6\sqrt{3}}{(3+\sqrt{2})S/V} = (12 + 6 \cdot 1,7) / ((3 + 1,4) \cdot 1,2) = 4,2 \text{ нм}$.

Решение задачи 5. Два наносвертка (8 баллов)

Запишем длину «рулона» для наносвертков II типа, равную длине диагонали прямоугольника:

$$L_2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Площадь поперечного сечения (в том месте, где определяем максимальный диаметр), с одной стороны, составляет для них

$$S_2 = \pi d_2^2 / 4,$$

а с другой, равна

$$S_2 = L_2 c.$$

Тогда максимальный диаметр наносвертков II типа равен

$$d_2 = 2 \sqrt{\frac{L_2 c}{\pi}} = 2 \sqrt{\frac{L_2 \cdot 0,775}{3,1}} = \sqrt{L_2} = \sqrt[4]{a^2 + b^2}$$

То есть,

$$a^2 = d_2^4 - b^2$$

и

$$a = \sqrt{d_2^4 - b^2} = \sqrt{25^4 - 500^2} = \sqrt{5^6 \cdot (25 - 16)} = 125 \cdot 3 = 375.$$

Решение задачи 6. Шестиугольный фуллерен (20 баллов)

- Общее число атомов в фуллерене **N** равно отношению площади его поверхности к площади, приходящейся на один атом углерода в графене, равной

$$S_C = 0,5(a\sqrt{3})^2 \sin 60^\circ.$$

Площадь поверхности шестиугольной антипризмы складывается из удвоенной площади шестиугольного основания и 12 площадей боковых треугольников, а площадь шестиугольной призмы — из площадей оснований и 6 площадей боковых прямоугольников. В то же время, равносторонний шестиугольник может быть представлен как совокупность шести равносторонних треугольников. Следовательно, нам необходимо найти только площади равностороннего треугольника и прямоугольника в зависимости от (**n**, **m**).

Любой равносторонний треугольник со стороной, задаваемой на графеновой сетке парой индексов (**n**, **m**), имеет площадь

$$S_{n,m} = 0,5(Ra\sqrt{3})^2 \sin 60^\circ,$$

где $R = \sqrt{n^2 + nm + m^2}$ – длина стороны такого треугольника в косоугольной системе координат. Тогда общее число атомов углерода, приходящихся на такой треугольник, составляет

$$T_{n,m} = \frac{S_{n,m}}{S_C} = R^2 = n^2 + nm + m^2.$$

Площадь прямоугольника, стороны которого задаются на графеновой сетке индексами (n, n) и $(n, 0)$, можно записать как

$$S_{(n,n),(n,0)} = (R_{n,n} a\sqrt{3})(R_{n,0} a\sqrt{3}) = \sqrt{3n^2} \sqrt{n^2} (a\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}n^2 a^2.$$

Тогда общее число атомов углерода, приходящихся на него,

$$P_n = \frac{S_{(n,n),(n,0)}}{S_C} = \frac{3\sqrt{3}n^2 a^2}{0,5(a\sqrt{3})^2 \sin 60^\circ} = 4n^2.$$

Следовательно, число атомов в фуллеренах по типам составляет:

$$\begin{aligned} N_1 &= (6 \cdot 2 + 12)T_{n,n} = 24T_{n,n} = 72n^2 \\ N_2 &= 6 \cdot 2T_{n,n} + 6P_n = 12T_{n,n} + 6P_n = 60n^2 \\ N_3 &= (6 \cdot 2 + 12)T_{n,0} = 24T_{n,0} = 24n^2 \\ N_4 &= 6 \cdot 2T_{n,0} + 6P_n = 12T_{n,0} + 6P_n = 36n^2 \end{aligned}$$

2.

а) $n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 2, n_4 = 2.$

б) $N_1 = 72, N_2 = 60, N_3 = 96, N_4 = 144.$

в) Изомеров среди шестиугольных фуллеренов, рассматриваемых в рамках данной задачи, не существует, так как ни в одном из 6 случаев невозможно решение в целых числах:

1) $72n_1^2 = 60n_2^2, 6n_1^2 = 5n_2^2.$

2) $72n_1^2 = 24n_3^2, n_1^2 = 3n_3^2.$

3) $72n_1^2 = 36n_4^2, n_1^2 = 2n_4^2.$

4) $60n_2^2 = 24n_3^2, 5n_2^2 = 2n_3^2.$

5) $60n_2^2 = 36n_4^2, 5n_2^2 = 3n_4^2.$

6) $24n_3^2 = 36n_4^2, 2n_3^2 = 3n_4^2.$

г) Диаметр сферы, описанной вокруг шестиугольной призмы, равен длине ее объемной диагонали. Ее, в свою очередь, можно рассчитать по теореме Пифагора, зная длину большей диагонали шестиугольного основания $2A$ (где A – длина стороны основания) и высоту этой призмы H :

$$D = \sqrt{4A^2 + H^2}.$$

Для фуллерена 2 типа

$$A_2 = 3an, H_2 = \sqrt{3}an.$$

$$\text{Тогда } D_2 = \sqrt{39}an.$$

Для фуллерена 4 типа

$$A_4 = \sqrt{3}an, H_4 = 3an.$$

$$\text{Тогда } D_4 = \sqrt{21}an.$$

Тогда размер фуллерена 1б составляет

$$D_2 = 1,7 \cdot 3,6 \cdot 0,14 \cdot 1 = 0,8568 \text{ нм.}$$

Размер фуллерена 1г составляет

$$D_4 = 1,7 \cdot 2,7 \cdot 0,14 \cdot 2 = 1,2852 \text{ нм.}$$

Решение задачи 7. Губка Менгера (20 баллов)

1.

а) Длина ребра нанокластера i -ой итерации составляет

$$A_i = 3^i \cdot a,$$

б) Тогда объем «материала» нанокластера i -ой итерации равен

$$V_i = 20^i \cdot a^3,$$

а доля объемных пустот, соответственно,

$$\omega_i = 1 - (20^i \cdot a^3) / (3^i \cdot a)^3 = 1 - (20/27)^i.$$

в) Запишем неравенство, отвечающее условию:

$$1 - (20/27)^i \geq 0,9$$

$$(20/27)^i \leq 0,1$$

$$\lg(20/27)^i \leq \lg 0,1$$

$$i \cdot \lg(20/27) \leq -1$$

$$i \geq -1 / (-0,14)$$

$$i \geq 7,1,$$

но, так как i – целое, то $i \geq 8$ и $i_{\min} = 8$.

2. Поскольку при каждой итерации грань складывается из 8 квадратов, полученных в предыдущей итерации, то

$$S_{\text{гр}}(i) = 8^i \cdot a^2,$$

где a^2 – это площадь грани единичного квадрата.

3.

а) $S_1 = 6S_{rp}(1) + 6 \cdot 4a^2 = 6 \cdot 8a^2 + 24a^2 = 72a^2 = 9S_{rp}(1) = 6S_{rp}(1) + 3S_{rp}(1)$

(сумма площади боковой поверхности и площади 6 «пор», примыкающих к граням; кубическая полость, находящаяся в центре губки Менгера первой итерации, не ограничена никакими поверхностями).

$$S_2 = 6S_{rp}(2) + 3S_{rp}(2) + 20 \cdot 3S_{rp}(1) = 6 \cdot 8^2 a^2 + 3 \cdot 8^2 a^2 + 20 \cdot 3 \cdot 8a^2 = 1056a^2$$

(по аналогии, сумма площади боковой поверхности и площади 6 «пор», примыкающих к граням для губки Менгера второй итерации, а также величина площади «пор» 20 составляющих ее губок первой итерации).

$$S_3 = 6S_{rp}(3) + 3S_{rp}(3) + 20 \cdot 3S_{rp}(2) + 20^2 \cdot 3S_{rp}(1) = 6 \cdot 8^3 a^2 + 3 \cdot 8^3 a^2 + 20 \cdot 3 \cdot 8^2 a^2 + 20^2 \cdot 3 \cdot 8a^2 = 18048a^2$$

б) По аналогии,

$$S_i = 6S_{rp}(i) + 3S_{rp}(i) + \sum_{k=1}^{i-1} F(k) = 9 \cdot 8^i a^2 + 3 \sum_{k=1}^{i-1} (20^k 8^{i-k} a^2) = 8^i a^2 \left(9 + 3 \sum_{k=1}^{i-1} 2,5^k \right)$$

$$S_i = 8^i a^2 \left(9 + 3 \cdot 2,5 \frac{2,5^{i-1} - 1}{2,5 - 1} \right) = 8^i a^2 \left(9 + 5(2,5^{i-1} - 1) \right) = 4 \cdot 8^i a^2 + 2 \cdot 20^i a^2$$

4.

$$\gamma_i = \frac{4 \cdot 8^i a^2 + 2 \cdot 20^i a^2}{20^i a^3} \cdot a = 4 \cdot 0,4^i + 2.$$

5. С ростом номера поколения данная величина уменьшается от $\gamma_0 = 6$ вплоть до

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i = \lim_{i \rightarrow \infty} (4 \cdot 0,4^i + 2) = 2.$$

Решение задачи 8. Биметаллический кубоктаэдр. Часть 2 (20 баллов)

1.

а) В слое с $n = 4$ атомы **B** расположены:

- в 3-х из 12-ти вершин кубоктаэдра,
- по 2 на каждом из 12-ти ребер (еще 12 ребер атомов **B** не содержат),
- по 4 на каждой из 6-ти квадратных граней,
- по 3 на каждой из 6-ти треугольных граней и по 1 на каждой из оставшихся двух треугольных гранях.

Всего $3 - 2 \cdot 12 + 24 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 2 = 23$ атома **B**.

б)

- На любой квадратной грани слоя, на ребро которого приходится $2k$ атомов, расположено k^2 атомов **B**,
- на 6-ти треугольных гранях атомами **B** являются $k(k + 1)/2$ атомов, а еще на 2-х треугольных гранях – $k(k - 1)/2$,
- на 12 из 24 ребер приходится по k атомов **B**,
- также атомы **B** расположены в 3-х из 12-ти вершин.

Всего в слое, на ребро которого приходится $2k$ атомов, расположено

$$M_B(k) = 6k^2 + 6 \cdot k(k + 1)/2 + 2 \cdot k(k - 1)/2 - 12k + 3$$

$$M_B(k) = 10k^2 - 10k + 3$$

атомов **B**.

2.

а) В слое с $n = 4$ общее число атомов в поверхностном слое равно

$$M_{\text{all}}(4) = 92,$$

то есть, доля атомов **B** составляет

$$\delta(4) = 23/92 = 0,25.$$

б) В слое с $n = 2k$

$$\delta = M_B(k)/M_{\text{all}}(2k)$$

$$\delta = (10k^2 - 10k + 3)/(40k^2 - 40k + 12) = 0,25$$

или

$$\delta = (2,5n^2 - 5n + 3)/(10n^2 - 20n + 12) = 0,25$$

в) В слое с $n = 2k + 1$ при $n \rightarrow \infty \delta = 0$.

В слое с $n = 2k$ при $n \rightarrow \infty \delta = 0,25$.

3.

а) В кластере с $n = 4$

$$y = 3 \text{ (слой с } n = 2) + 23 \text{ (слой с } n = 4) = 26,$$

$$x = N_{\text{all}}(4) - y = 147 - 26 = 121,$$

тогда

$$x:y = 121:26 \approx 4,65.$$

б) В кластере, на ребро которого приходится n атомов, рассмотрим два возможных случая.

В кластере с $n = 2k$

$$y = \sum_1^k M_B(m) = \sum_1^k (10m^2 - 10m + 3) = \frac{10k^3 - k}{3}$$

$$y = (10n^3 - 4n)/24$$

Тогда атомов **A** в таком кластере

$$x = N_{\text{all}}(n) - y,$$

$$x = (10n^3 - 15n^2 + 11n - 3)/3 - (10n^3 - 4n)/24,$$

$$x = (70n^3 - 120n^2 + 92n - 24)/24,$$

и соотношение равно

$$x:y = \{(70n^3 - 120n^2 + 92n - 24)/24\} : \{(10n^3 - 4n)/24\}$$

$$x:y = (35n^3 - 60n^2 + 46n - 12)/(5n^3 - 2n)$$

в) В кластере с $n = 2k + 1$

$$y = (10k^3 - k)/3$$

$$y = (10(0,5n - 0,5)^3 - (0,5n - 0,5))/3,$$

$$y = (5n^3 - 15n^2 + 13n - 3)/12.$$

Тогда атомов **A** в таком кластере

$$x = N_{\text{all}}(n) - y,$$

$$x = (10n^3 - 15n^2 + 11n - 3)/3 - (5n^3 - 15n^2 + 13n - 3)/12,$$

$$x = (35n^3 - 45n^2 + 31n - 9)/12,$$

и соотношение равно

$$x:y = \{(35n^3 - 45n^2 + 31n - 9)/12\} : \{(5n^3 - 15n^2 + 13n - 3)/12\}$$

$$x:y = (35n^3 - 45n^2 + 31n - 9)/(5n^3 - 15n^2 + 13n - 3)$$

г) В случае $n = 2k$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{35n^3 - 60n^2 + 46n - 12}{5n^3 - 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{35 - 60/n + 46/n^2 - 12/n^3}{5 - 2/n^2} = 7.$$

В случае $n = 2k + 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{35n^3 - 45n^2 + 31n - 9}{5n^3 - 15n^2 + 13n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{35 - 45/n + 31/n^2 - 9/n^3}{5 - 15/n + 13/n^2 - 3/n^3} = 7.$$