



## Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап) Решение задачи 7. Геокупол

1. Вершины многогранника **X**, в которых сходится по пять ребер (одновременно являются вершинами икосаэдра), образуют треугольники, каждый из которых составлен из 9 малых треугольников – граней **X**. Всего в икосаэдре 20 таких больших треугольников, следовательно, общее число треугольных граней в **X** равно

$$F = 20 \cdot 9 = 180.$$

В свою очередь, общее число ребер составляет

$$E = 180 \cdot 3 / 2 = 270$$

(каждая треугольная грань имеет три ребра, но каждое ребро принадлежит двум граням).

Общее число вершин можно рассчитать, воспользовавшись теоремой Эйлера для выпуклых многогранников:

$$\text{число вершин (V)} - \text{число ребер (E)} + \text{число граней (F)} = 2.$$

Тогда

$$V = 2 - F + E$$

$$V = 2 - 180 + 270 = 92.$$

2. В многограннике **Y** вершины будут формировать пятиугольные и шестиугольные грани, сходящиеся в вершинах по 3, что полностью совпадает с определением фуллереновой молекулы.

Общее число атомов углерода в фуллереновой молекуле, которой отвечает многогранник **Y**, равно числу треугольных граней в **X**, то есть, в результате описанного преобразования получается фуллерен  $C_{180}$ .

3. У представленного в условии каркаса можно выделить три типа вершин:

- **A** – сходятся 5 ребер (они же – вершины икосаэдра в **X**, удаляются при преобразовании в **X'**);
- **B** – сходятся 6 ребер; лежат на отрезке, соединяющем две ближайшие друг к другу вершины **A** (то есть, на ребре икосаэдра в **X**); в многограннике **X'** в них остается по 5 ребер, а, следовательно, они не могут быть удалены при преобразовании в **Z**;
- **B** – сходятся 6 ребер; лежат в центре треугольных граней икосаэдра в **X**, следовательно, могут удаляться при преобразовании в **Z**.

Чтобы получить многогранник, составленный из пяти- и шестиугольных граней, необходимо из **X'** удалить все вершины типа **B**. При этом оставшиеся в каркасе

вершины типа **Б** дополнительно потеряют по два ребра, и в них будет сходиться по три ребра, что отвечает определению фуллеренового многогранника.

То есть, вершинами **Z** будут вершины типа **Б** в **X**. Общее их количество равно числу ребер икосаэдра, умноженному на 2 (так как на каждое ребро икосаэдра приходится две таких вершины):

$$30 \cdot 2 = 60.$$

Таким образом, многограннику **Z** отвечает фуллерен  $C_{60}$ . Он содержит в три раза меньше атомов, чем отвечающий многограннику **Y**  $C_{180}$ .