



Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

Решение задачи 2. Полимеразная цепная реакция

1. Выведем в общем виде формулу, связывающую число исходных экземпляров ДНК (N_D), число праймеров N_p до начала копирования и число циклов копирования n . Для этого запишем изменение числа экземпляров ДНК N от цикла к циклу:

- 1-й цикл:
каждая из N_D молекул ДНК расплетается и с $2N_D$ цепочек связываются $2N_D$ праймеров, формируя $N = 2N_D$ молекул ДНК;
- 2-й цикл:
каждая из $2N_D$ молекул ДНК расплетается и с $2N_D + 2N_D = 4N_D$ цепочек связываются $4N_D$ праймеров, формируя $N = 4N_D$ молекул ДНК;
- 3-й цикл:
каждая из $2N_D$ молекул ДНК расплетается и с $4N_D + 4N_D = 8N_D$ цепочек связываются $8N_D$ праймеров, формируя $N = 8N_D$ молекул ДНК;
- ...
- n-й цикл:
каждая из $2^{n-1}N_D$ молекул молекула ДНК расплетается и с $2^{n-1}N_D + 2^{n-1}N_D = 2^n N_D$ цепочек связываются $2^n N_D$ праймеров, формируя $N = 2^n N_D$ молекул ДНК.

Общее число праймеров, израсходованных в n циклах, составляет

$$N_p = 2N_D + 4N_D + 8N_D + \dots + 2^n N_D = \sum_1^n 2^k N_D = (2^{n+1} - 2)N_D$$

Тогда число циклов, обеспеченных праймерами, составляет

$$n = \log_2 \left(\frac{N_p}{N_D} + 2 \right) - 1$$

$$n = \log_2 (2050 + 2) - 1 \approx 11 - 1 = \underline{10}.$$

То есть, при проведении 10 циклов ПЦР количество экземпляров ДНК увеличится в

$$2^n = 2^{10} = \underline{1024 \text{ раза}}.$$

2. Далее будем называть:

- *матричными* — исходные молекулы ДНК, существующие только до начала ПЦР;
- *гибридными I-го типа* — молекулы ДНК, в которых одна из цепочек синтезирована по матричной, а другая — матричная, впервые они появляются в первом цикле ПЦР;
- *гибридными II-го типа* — молекулы ДНК, в которых одна из цепочек синтезирована по матричной, а другая — не по ней, впервые они появляются во втором цикле ПЦР;
- *специфическими* — искомые молекулы ДНК, в которых обе цепочки синтезированы не по матрице, впервые они появляются в третьем цикле ПЦР.

Запишем, как при проведении ПЦР от цикла к циклу меняется количество молекул ДНК каждого из типов:

- 1-й цикл:
все $2N_D$ молекул ДНК – гибридные I-го типа;
- 2-й цикл:
 $2N_D$ гибридных I-го типа и $2N_D$ гибридных II-го типа;
- 3-й цикл:
 $2N_D$ гибридных I-го типа, $4N_D$ гибридных II-го типа, $2N_D$ специфических молекул ДНК.

То есть, по окончании n циклов общее число специфических молекул ДНК составляет

$$N_S = (2^n - 2n)N_D.$$

Тогда

$$N_S = (2^{10} - 2 \cdot 10) \cdot N_D = 1004N_D = 1004 \cdot 2 \cdot 10^9,$$

$$N_S = 2,008 \cdot 10^{12}.$$