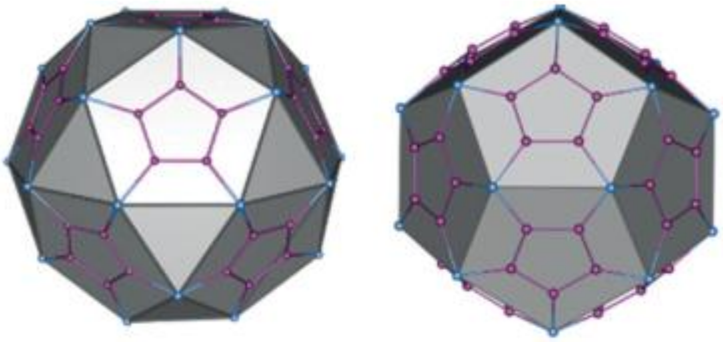
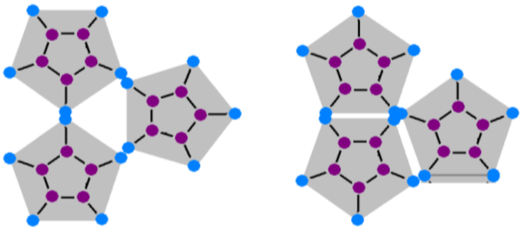
Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 9. Медно-фосфорные каркасы



1. Рассмотрим возможные способы объединения общих пятиугольных плоских мотивов:



A: атомы меди связаны с двумя атомами фосфора, то есть каждая пара плоских пятиугольных мотивов имеет общий атом меди.

B: атомы меди связаны с тремя атомами фосфора, то есть каждая тройка плоских пятиугольных мотивов имеет общий атом меди.

Обозначим общее количество пятиугольных мотивов как $\mathbf{F_5}$.

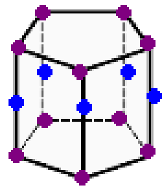
а) Соотношение атомов **n**:**m**:

A: на каждый фрагмент приходится 5 атомов фосфора и 5/2 атома меди (каждый атом фосфора связан с одни атомом меди, каждый атом меди связан с двумя атомами фосфора), что означает **n**:**m** = ($\mathbf{F_5}$·5):($\mathbf{F_5}$·5/2) = 2:1.

B: на каждый фрагмент приходится 5 атомов фосфора и 5/3 атома меди (каждый атом фосфора связан с одни атомом меди, каждый атом меди связан с тремя атомами фосфора), что означает **n**:**m** = ($\mathbf{F_5}$·5):($\mathbf{F_5}$·5/3) = 3:1.

б) В структуре медно-фосфорного каркаса, кроме P_5, также должны быть многоугольники, в вершинах которых расположен не только фосфор, но и медь. Поскольку каждый атом меди может быть связан только с атомом фосфора, а атом фосфора может иметь только одну связь с атомом меди, то атомов фосфора в таком многоугольнике в 2 раза больше, чем меди: $P_{2\mathbf{z}}Cu_{\mathbf{z}}$.

в) Запишем теорему Эйлера для многогранника, в который объединяются плоские пятиугольные мотивы:



А: **z** = 2 (мотивы граничат по ребрам; возможно только в одном случае – если все пять вершин у пары мотивов общие, но подобный каркас возможен либо если атомы меди не лежат ни в одной плоскости фосфорных пятиугольников, либо лежат сразу в обоих, что противоречит условию – выпуклый многогранник, составленный из плоских мотивов определенного состава), цикл P_4Cu_2 (всего шесть атомов).

V = $\mathbf{F_5}$·5/2, **E** = 5, **F** = $\mathbf{F_5}$ => $\mathbf{F_5}$·5/2 – 5 + $\mathbf{F_5}$ = 2, $\mathbf{F_5}$ = 2. **n** = 10, **m** = 5.

z = 3 (пятиугольные мотивы граничат по одной вершине, формируют плоскую треугольную грань), цикл P_6Cu_3 (всего девять атомов).

V = $\mathbf{F_5}$·5/2, **E** = 5$\mathbf{F_5}$ (нет ребер, которые не принадлежали бы пятиугольным мотивам),

F = $\mathbf{F_5}$ + $\mathbf{F_3}$ => $\mathbf{F_5}$·5/2 – 5$\mathbf{F_5}$ + $\mathbf{F_5}$ + $\mathbf{F_3}$ = 2 => $\mathbf{F_3}$ = 2 + 1,5$\mathbf{F_5}$. В то же время, $\mathbf{F_3}$ = **E**/3.

То есть, $\mathbf{F_5}$·5/3 = 2 + 1,5$\mathbf{F_5}$, $\mathbf{F_5}$ = 12 и $\mathbf{F_3}$ = 20.

Тогда **n** = $\mathbf{F_5}$·5 = 12·5 = 60 , **m** = $\mathbf{F_5}$·5/2 = 12·5/2 = 30 или $P_{60}Cu_{30}$.

z = 4: **V** = $\mathbf{F_5}$·5/2, **E** = 5$\mathbf{F_5}$, **F** = $\mathbf{F_5}$ + $\mathbf{F_4}$ => $\mathbf{F_5}$·5/2 – 5$\mathbf{F_5}$ + $\mathbf{F_5}$ + $\mathbf{F_4}$ = 2 => $\mathbf{F_4}$ = 2 + 1,5$\mathbf{F_5}$. В то же время, $\mathbf{F_4}$ = **E**/4. $\mathbf{F_5}$·5/4 = 2 + 1,5$\mathbf{F_5}$ и $\mathbf{F_5}$ = -8, что лишено смысла, следовательно, фигура с **z** ≥ 4 не существует.

В: **z** = 2 (единственно возможный вариант, мотивы граничат по ребрам, если бы граничили по вершинам, то получился бы не многогранник, а разветвленная структура – дендример; следовательно, в медно-фосфорных циклах ровно 2 атома меди), цикл P_4Cu_2 (всего шесть атомов).

V = $\mathbf{F_5}$·5/3, **E** = $\mathbf{F_5}$·5/2 (мотивы граничат по ребрам,), **F** = $\mathbf{F_5}$.

$\mathbf{F_5}$·5/3 – $\mathbf{F_5}$·5/2 + $\mathbf{F_5}$ = 2, $\mathbf{F_5}$ = 12. Тогда **n** = $\mathbf{F_5}$·5 = 12·5 = 60 , **m** = $\mathbf{F_5}$·5/3 = 12·5/3 = 20 или $P_{60}Cu_{20}$.

г) **А**: 20 циклов (по числу $\mathbf{F_3}$).

В: 30 циклов (по числу ребер многогранника, составленного из плоских мотивов).

д) Центры пятиугольных фосфорных циклов в обоих случаях формируют икосаэдр.

2.

а) **X**: 30 вершин, 12 пятиугольных граней (P_5, окруженный пятью атомами меди) и 20 треугольных граней, 20·3 = 60 ребер (линии, соединяющие попарно атомы меди в девятичленном цикле).

Y: 20 вершин, 12 пятиугольных граней (P_5, окруженный пятью атомами меди), 30 ребер (большие диагонали шестичленных циклов, соединяют атомы меди).

б) **X**: икосододекаэдр.

Y: додекаэдр.

3.

а) 10 атомов меди;

б) они образуют правильный десятиугольник;

в) поскольку в одной фигуре «задействуются» 10 из 60 ребер, то существует 6 независимых десятиугольников на поверхности **X**.

4. **X**: Диаметр описанной вокруг икосододекаэдра сферы равен диаметру окружности, описанной вокруг правильного десятиугольника $D = L\left(1+\sqrt{5}\right)+r_{Cu}$, где L – ребро икосододекаэра, равное стороне плоского пятиугольного мотива.
Y: Диаметр описанной вокруг додекаэдра сферы равен $D = 0{,}5L\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{3}+r_{Cu}$, где L – ребро додекаэдра, равное стороне плоского пятиугольного мотива. Рассмотрим равнобедренную трапецию CuPPCu (см. плоский пятиугольный мотив), в которой $\mathbf{d_{PP}}$ = 2$\mathbf{r_P}$ = 0,218 нм, $\mathbf{d_{CuP}}$ = $\mathbf{r_{Cu}}$ + $\mathbf{r_P}$ = 0,233 нм, **L** = $\mathbf{d_{CuCu}}$ = $\mathbf{d_{PP}}$ + 2$\mathbf{d_{CuP}}$sin($\angle PCuCu$). $\angle PCuCu$ = 180·3/5/2 = 54° (половина угла в правильном пятиугольнике). Тогда **L** = 0,218 + 2·0,233sin(54°) = 0,595 нм.

X: $D = 0{,}595\left(1+\sqrt{5}\right)+0{,}124 =$ 2,05 нм,
Y: $D = 0{,}5\cdot 0{,}595\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{3}+0{,}124 =$ 1,79 нм.

5. Отсутствовать должны группы атомов, которые переводятся друг в друга поворотом вокруг оси симметрии. Это могут быть атомы меди в торцевых пятиугольных мотивах (по 5 в каждом), атомы меди между торцевым мотивом и экватором (по 5 сверху и снизу), или 10 экваториальных атомов меди. Среди этих 3 вариантов только во втором молекула останется связанной с помощью образующихся на рис. 1а связей, два других варианта приводят к отделению торцевых мотивов или к разделению молекулы на 2 части, соответственно. На рисунке приведено экспериментально определенное реальное расположение атомов в каркасе **A’** реальной молекулы.