## Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)
## Решение задачи 5. В поисках нанотрубки

1.

1) Найдем, взаимосвязь между диаметром и индексами хиральности, (**n**, **m**).

По условию, отрезок **OX** равен длине окружности УНТ, следовательно, ее диаметр можно найти по формуле **D** = **OX**/**π**.

В свою очередь, длина отрезка **OX**, по теореме косинусов, составляет

$$\mathbf{OX}^2 = (\mathbf{nr})^2 + (\mathbf{mr})^2 - 2\mathbf{nr}\cdot\mathbf{mr}\cdot\cos(120°) = \mathbf{r}^2(\mathbf{n}^2 + \mathbf{m}^2 - 2\mathbf{nm}(-0,5)) = \mathbf{r}^2(\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2),$$

где **r** – длина единичного отрезка, равного расстоянию между центрами соседних шестиугольников:

$$\mathbf{r} = 2\mathbf{a}\cos(30°) = \mathbf{a}\sqrt{3} = 0,14\sqrt{3}.$$

Следовательно, диаметр УНТ можно рассчитать по формуле

$$\mathbf{D} = \frac{0,14\sqrt{3}}{\pi}\sqrt{n^2+nm+m^2} = 0,077186\sqrt{n^2+nm+m^2}$$

То есть,

$$\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2 = \left(\frac{D}{0,077186}\right)^2.$$

Тогда

$$\mathbf{D} = 2 \text{ нм}, \ \mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2 = 671,4,$$

$$\mathbf{D} = 3 \text{ нм}, \ \mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2 = 1510,6.$$

Таким образом, все значения пар (**n**, **m**) (таких, что **n** ≥ **m**), должны удовлетворять условию

$$672 \le \mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2 \le 1510.$$

2) Минимальное значение индекса **n** соответствует случаю **m** = **n** (для одного и того же диаметра УНТ величина индексов хиральности тем меньше, чем ближе их значения друг к другу) и $\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2 \ge 672$ (минимальный диаметр):

$$\mathbf{n}^2 + \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} + \mathbf{n}^2 \ge 672$$

$$\mathbf{n} \ge 14,97$$

Тогда

$$\mathbf{n}_{\mathbf{min}} = 15.$$

3) Максимальное значение индекса **n** соответствует случаю **m** = 0 (для одного и того же диаметра УНТ величина одного из индексов хиральности тем больше, чем ближе значение второго к нулю) и $\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2 \leq 1510$ (максимальный диаметр):

$$\mathbf{n}^2 + \mathbf{n} \cdot 0 + 0^2 \leq 1510$$

$$\mathbf{n} \leq 38{,}86$$

Тогда

$$\mathbf{n}_{max} = 38.$$

2. Очевидно, что нахождения всех пар индексов хиральности (**n**, **m**), удовлетворяющих условию, необходимо осуществить перебор всех возможных значений выражения $\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2$ в цикле по **n** от $\mathbf{n}_{min}$ до $\mathbf{n}_{max}$ и во вложенном цикле по **m** от 0 до **n**, и посчитать, сколько из них удовлетворяют условию $672 \leq \mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2 \leq 1510$.

Текст программы на языке Pascal

```pascal
var
  n,m,d,tubes: integer;

begin
  tubes := 0;
  for n := 15 to 38 do
  begin
    for m := 0 to n do
    begin
      d := n*n + n*m + m*m;
     if (d >= 672) and (d <= 1510) then
       tubes := tubes + 1;
    end;
  end;
  writeln ('number of tubes: ', tubes);
end.
```

Всего 264 УНТ.

```
Окно вывода
number of tubes: 264
```