



Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур) Решение задачи 1. 2021 и фуллерены

Обозначим V число вершин, тогда число ребер равно

$$E = 1,5V$$

(в каждой вершине сходится по 3 ребра, но каждое ребро принадлежит двум вершинам).

Общее число граней можно записать как

$$F = F_5 + F_6.$$

Выразим число вершин через число граней:

$$V = 5/3F_5 + 6/3F_6$$

(каждая пяти- (шестиугольная) грань дает 5 (6) вершин, но каждая вершина принадлежит трем граням).

Тогда число ребер

$$E = 1,5(5/3F_5 + 2F_6) = 2,5F_5 + 3F_6.$$

Запишем теорему Эйлера для выпуклых многогранников:

$$V + F - E = 2.$$

Таким образом,

$$5/3F_5 + 2F_6 + F_5 + F_6 - 2,5F_5 - 3F_6 = 2$$

$$\text{или } F_5 = 12.$$

То есть, любой многогранник, составленный из пяти- и шестиугольников, сходящихся в вершинах по три, всегда содержит строго 12 пятиугольников.

Тогда:

- число вершин фуллерена $V = 5/3 \cdot 12 + 2F_6 = 20 + 2F_6$,
- число ребер фуллерена $E = 2,5 \cdot 12 + 3F_6 = 30 + 3F_6$,
- число граней фуллерена $F = 12 + F_6$.

То есть, $V \geq 20$ и $V:2$, $E \geq 30$ и $E:3$, $F \geq 12$.

Рассмотрим число **2021**:

- оно нечетное (не делится на 2),
- сумма его чисел $2 + 0 + 2 + 1 = 5$ не делится на 3, то есть, 2021 не делится без остатка на 3,

Следовательно, фуллеренов, имеющих 2021 вершину либо 2021 ребро не существует.

Если число граней фуллерена составляет $F = 2021$, то

$$F_5 = 12,$$

$$F_6 = 2021 - 12 = 2009,$$

$$V = 20 + 2 \cdot 2009 = 4038,$$

$$E = 30 + 3 \cdot 2009 = 6057.$$