



Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

Решение задачи 6. Икосаэдрические фуллерены и индексы хиральности

1. Запишем число атомов в икосаэдрическом фуллерене как функцию от суммы индексов хиральности:

$$N = 20(n^2 + nm + m^2) = 20(n^2 + 2nm + m^2 - nm) = 20((n + m)^2 - nm) = 20(c^2 - n(c - n))$$

$$N = 20(c^2 - cn + n^2)$$

Максимальному значению числа атомов N_{\max} отвечает минимальное значение величины, вычитаемой из константы $20c^2$: $20n(c - n) = 0$, то есть либо $n = 0$, либо $c - n = 0$. При этом $m = c$ (или $n = c$) и $N(0, c) = N(c, 0) = 20c^2$.

**В условии задачи была допущена неточность: для фуллеренов вместо $n, m \in \mathbb{N}_0$ было указано $n, m \in \mathbb{N}$. Все решения, выполненные с учетом $n, m \in \mathbb{N}$, оценивались полным баллом.*

Чтобы найти значение n , отвечающее N_{\min} , запишем первую производную и приравняем ее к нулю:

$$N'(n) = 20(-c + 2n) = 0,$$

то есть, $2n - c = 0$ или $n = 0,5c$. Значение второй производной

$$N''(n) = 40 > 0$$

подтверждает, что найденный экстремум отвечает минимуму функции $N(n)$.

Поскольку $n, m \in \mathbb{N}$, то $n = 0,5c$ справедливо только для $c \div 2$. Для нечетных значений c ближайшим целым значением n будет $0,5c - 0,5$.

Тогда для $c \div 2$ второй индекс равен $m = c - 0,5c = 0,5c$ и минимальное число атомов равно $N(0,5c, 0,5c) = 20 \cdot 3 \cdot 0,25 \cdot c^2 = 15c^2$, а нечетных значений c второй индекс равен $m = c - 0,5(c - 1) = 0,5c + 0,5$ и минимальное число атомов равно

$$N\left(\frac{c-1}{2}, \frac{c+1}{2}\right) = 20\left(\left(\frac{c-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{c+1}{2}\right) + \left(\frac{c+1}{2}\right)^2\right) = 5(3c^2 + 1)$$

Таким образом, $N_{\max}(c) = 20c^2$ (для икосаэдрических фуллеренов с индексами $(0, c)$ и $(c, 0)$), $N_{\min}(c) = 15c^2$ (для $c \div 2$ и икосаэдрических фуллеренов с индексами $(0,5c, 0,5c)$) либо $N_{\min}(c) = 5(3c^2 + 1)$ (для нечетного c и икосаэдрических фуллеренов с индексами $(0,5c - 0,5, 0,5c + 0,5)$).

2. $F_1: c = 1, n = 0, m = 1, N(0,1) = 20$. Ряд состоит из одного икосаэдрического фуллерена.
3. $F_2: c = 2$,
минимальное число атомов: $n = 0, m = 2, N(0,2) = 80$;
максимальное число атомов: $n = 1, m = 1, N(1,1) = 60$.
Ряд состоит только из этих двух икосаэдрических фуллеренов.
4. $N_{\max}(0,2017) = 20 \cdot 2017^2 = 81365780$, $N_{\min}(1008,1009) = 5(3 \cdot 2017^2 + 1) = 61024340$.
В ряду F_{2017} индекс n проходит все значения от 0 до 1008, то есть, ряд содержит 1009 икосаэдрических фуллеренов.