Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 8. Вот, новый поворот

1. В прямоугольном треугольнике Δ**HBG** (рис. 2 условия) катет **BG** = **BH**·cos(∠**HBD**/2) = **BH**·cos(**θ**/2). В свою очередь, в прямоугольном треугольнике Δ**ABH** гипотенуза **BH** = **AB**/cos(∠**ABH**) = **AB**/cos(90° – ∠**HBD**) = **AB**/sin(∠**HBD**) = **d**/sin(**θ**).

   Тогда **L** = **BG** = **d**cos(**θ**/2)/sin(**θ**) = **d**/(2sin(**θ**/2)).

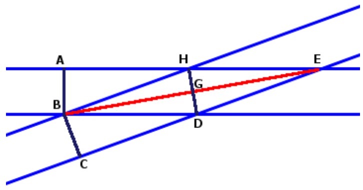

Рис. 2 условия.

2. Искомые точки являются центрами шестиугольников (отмечены ярко-синим, рис. 1). Соединим попарно некоторые из отмеченных точек.

   Индексы хиральности для одного из отрезков, определенные относительно первого (черная сетка шестиугольников, оранжевые оси координат) и второго (синяя сетка шестиугольников, салатовые оси координат) слоев отличаются с точностью до перестановки: (7,6) и (6,7).

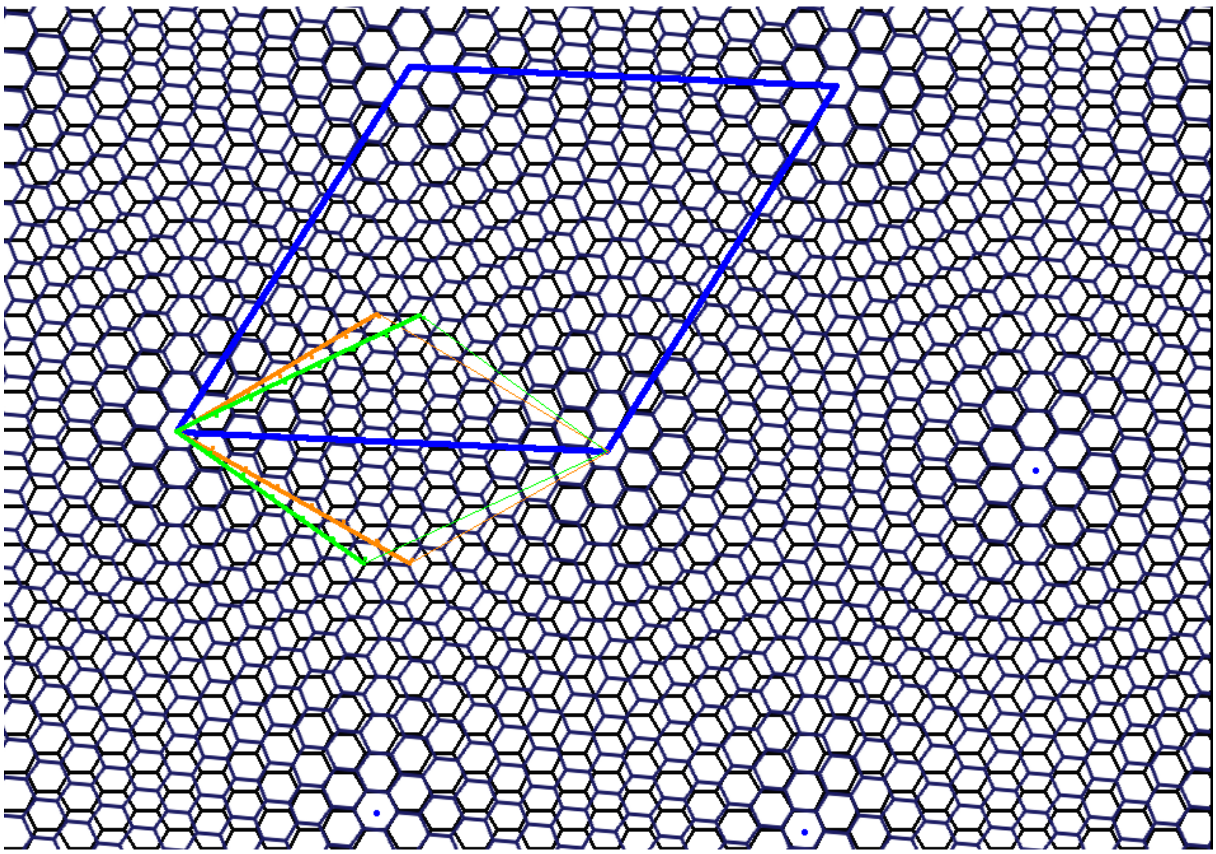

Рис. 1.

3. Найдем искомую длину, воспользовавшись теоремой косинусов для Δ**ABC**:

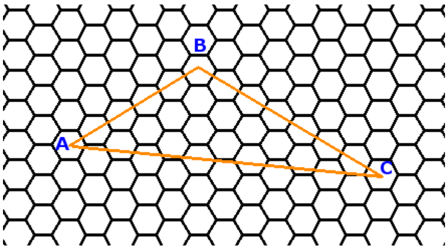

Рис. 2

$$\mathbf{L} = \mathbf{AC} = \sqrt{\left(na\sqrt{3}\right)^2 + \left(ma\sqrt{3}\right)^2 - 2ma\sqrt{3}na\sqrt{3}\cos 120^o} = a\sqrt{3}\sqrt{n^2 + m^2 - 2nm(-0{,}5)}$$

(так как **AB** = **ma**$\sqrt{3}$, **BC** = **na**$\sqrt{3}$, $\angle$ **ABC** = 120°).

L = $a\sqrt{3}\sqrt{n^2 + nm + m^2} = a\sqrt{3}N$ – то есть, как и следует из рисунка 1, длина не зависит от выбора системы координат, поскольку индексы совпадают с точностью до перестановки.

L = $0{,}14\sqrt{3}\sqrt{6^2 + 6\cdot 7 + 7^2} =$ 2,73 нм.

Заметим, что искомый угол (рис. 1, угол между оранжевой и светло-зеленой осями координат) равен разности углов при индексе 6 и при индексе 7:

θ = $\angle$ **BAC** – $\angle$ **BCA** = **α** – **β**.

Запишем теорему косинусов для обоих углов:

$$\left(a\sqrt{3}m\right)^2 = \left(a\sqrt{3}n\right)^2 + \left(a\sqrt{3}N\right)^2 - 2Na\sqrt{3}na\sqrt{3}\cos\alpha$$

$$\text{или } \cos\alpha = \frac{N^2 + n^2 - m^2}{2Nn} = \frac{2n + m}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}}$$

$$\left(a\sqrt{3}n\right)^2 = \left(a\sqrt{3}m\right)^2 + \left(a\sqrt{3}N\right)^2 - 2Na\sqrt{3}ma\sqrt{3}\cos\beta$$

$$\text{или } \cos\beta = \frac{N^2 + m^2 - n^2}{2Nm} = \frac{2m + n}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}}$$

Тогда

$$\theta = \arccos\left(\frac{2n + m}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}}\right) - \arccos\left(\frac{2m + n}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{2\cdot 7 + 6}{2\sqrt{7^2 + 7\cdot 6 + 6^2}}\right) - \arccos\left(\frac{2\cdot 6 + 7}{2\sqrt{7^2 + 7\cdot 6 + 6^2}}\right) \approx 5{,}1°.$$

4. Ранее мы установили, что **L** = **d**/(2sin(**θ**/2)).

   Тогда **d** = 2**D**sin(**θ**/2) = 2·2,73sin(2,55°) = 0,24 нм, что соответствует кратчайшему расстоянию между центрами соседних шестиугольников (рис. 3), то есть, длине малой диагонали шестиугольника: 0,24 = 0,14$\sqrt{3}$ = **a**$\sqrt{3}$ = **d**.

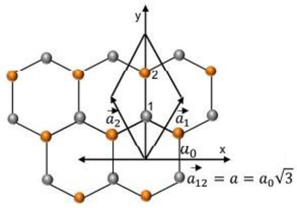

Рис. 3.

5. Для уменьшения погрешности вычислений проведем по три измерения L_N для каждого из образцов (в пикселях (пкс), при помощи графического редактора). Каждое измерение – между центрами светлых областей, разделенных N шагами.

	бар 5 нм, пкс	L_N, пкс	N	L, пкс	L ср, пкс	L, нм	θ, рад	θ, градусы	
А	122	211	6	35,17	35,12	1,44	0,168	9,63	9,6
		277	8	34,63					
		249	7	35,57					
Б	93	236	6	39,33	39,71	2,13	0,114	6,53	6,4
		200	5	40					
		199	5	39,8					
В	63	240	5	48	47,95	3,81	0,0636	3,64	3,5
		238	5	47,6					
		193	4	48,25					
Г	48	164	2	82	83,17	8,66	0,0280	1,60	1,4
		167	2	83,5					
		168	2	84