



Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап) Решение задачи 6. Тетрикс

1. Единичные тетраэдры, содержащие **Cd** в центре, заполняют центральные полости четырех **S1(T2)**, дополняя их до **T4**, то есть, всю структуру полого кластера $In_xCd_yS_z$ можно рассматривать как **S1(T4)**.

2.

1) Обозначим общее число атомов металла в супертетраэдре как **N_M**, атомов **S** – **N_S**. Выведем зависимость общего числа атомов **M** и **S** в зависимости от номера поколения супертетраэдров **n**, формирующих тетрикс, а также от номера поколения последнего.

При переходе от поколения к поколению в **Sm(Tn)** количество атомов **M** в тетриксе (**N_{MT}**) каждый раз увеличивается в 4 раза (исходя из принципов построения), следовательно,

$$N_{MT}(m, n) = 4^m N_M(n) = 4^m (n^3 + 3n^2 + 2n)/6.$$

В то же время, число атомов **S** в тетриксе (**N_{ST}**) при переходе от поколения к поколению в **Sm**, с одной стороны, увеличивается в 4 раза, а с другой – необходимо учитывать, что в точках касания супертетраэдры имеют общие атомы **S**, по одному на каждом из ребер **Sm**:

$$N_{ST}(1, n) = 4N_S(n) - 6.$$

Повторяя рассуждения, получаем

$$N_{ST}(2, n) = 4N_{ST}(1, n) - 6 = 4(4N_S(n) - 6) - 6$$

$$N_{ST}(3, n) = 4N_{ST}(2, n) - 6 = 4(4(4N_S(n) - 6) - 6) - 6$$

...

$$N_{ST}(m, n) = 4^m N_S(n) - 6 \sum_0^m 4^{a-1} = 4^m N_S(n) - 6(4^m - 2)/3 = 4^m (N_S(n) - 2) + 2$$

$$N_{ST}(m, n) = 4^m ((n^3 + 6n^2 + 11n + 6)/6 - 2) + 2 = 4^m (n^3 + 6n^2 + 11n - 6)/6 + 2$$

2) Единичные тетраэдры, содержащие **In** в центре, образуют тетрикс **S2(T2)**:

$$x = N_{INT}(2, 2) = 4^2 N_{In}(2) = 16 \cdot (2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2)/6 = 64$$

3) Тогда

$$y = N_{(In+Cd)T}(1, 4) - N_{INT}(2, 2) = 4 \cdot N_{(In+Cd)T}(4) - x = 4 \cdot (4^3 + 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4)/6 - 64 = 16.$$

4) Общее число атомов **S** в **S1(T4)**, соответственно, равно

$$z = N_{ST}(1, 4) = 4(4^3 + 6 \cdot 4^2 + 11 \cdot 4 - 6)/6 + 2 = 134.$$

