



Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 5. Нанопористое углеволокно

1.

а) Пусть длина отдельного волокна равна L , тогда его объем равен

$$V_1 = \pi D^2 L / 4, \quad (1)$$

а объем одной поры, длина которой L' в рамках упрощенной модели структуры НУВ равна длине всего волокна L , –

$$V_2 = \pi d^2 L / 4. \quad (2)$$

В то же время, площадь поверхности волокна составляет

$$S_1 = \pi D L \quad (3)$$

(при $L \gg D$ вклад площади торцов цилиндра можно не учитывать), а площадь поверхности поры, соответственно,

$$S_2 = \pi d L. \quad (4)$$

По определению, величина удельной площади поверхности равна отношению суммарной площади поверхности материала S к его массе m , которую, в свою очередь, можно записать через ρ и объем материала V :

$$S_{уд} = \frac{S}{m} = \frac{S}{\rho V} \quad (5)$$

Обозначим число пор в отдельном волокне как N .

Тогда, выразив S через N , (3) и (4) как сумму S_1 и площадей всех пор, а V – через N , (1) и (2) как разность V_1 и объема всех пор, $S_{уд}$ можно записать как

$$S_{уд} = \frac{S_1 + N S_2}{\rho(V_1 - N V_2)} = \frac{\pi D L + N \pi d L}{\rho(\pi D^2 L / 4 - N \pi d^2 L / 4)} = 4 \frac{D + N d}{\rho(D^2 - N d^2)}. \quad (6)$$

б) Считаем, что δ для НУВ диаметром D примерно совпадает с долей пор, отвечающей модели, приведенной на рис. 3 условия. Эта доля равна отношению площади пор, приходящейся на треугольник с центрами в трех ближайших порах, к площади такого треугольника:

$$\delta = \frac{3 \cdot (1/6) \cdot \pi d^2 / 4}{0,5 \cdot \sqrt{3} / 2 \cdot (d+h)^2} = \frac{\pi d^2}{2\sqrt{3}(d+h)^2}. \quad (7)$$

2. Из формулы (6) можно выразить N как

$$N = \frac{S_{уд} \rho D^2 - 4D}{S_{уд} \rho d^2 + 4d}. \quad (8)$$

В то же время, число пор в отдельном волокне можно оценить исходя из δ , а также площадей сечения отдельной поры и самого волокна:

$$N = \frac{\pi D^2 / 4}{\pi d^2 / 4} \cdot \delta = \frac{D^2}{d^2} \cdot \frac{\pi d^2}{2\sqrt{3}(d+h)^2} = \frac{\pi D^2}{2\sqrt{3}(d+h)^2}. \quad (9)$$

Приравнявая (8) к (9), и упрощая полученное выражение, получаем квадратное уравнение относительно d :

$$\frac{S_{уд}\rho D^2 - 4D}{S_{уд}\rho d^2 + 4d} = \frac{\pi D^2}{2\sqrt{3}(d+h)^2}, \quad (10.1)$$

$$(S_{уд}\rho D - 4) \cdot 2\sqrt{3}(d+h)^2 = \pi D \cdot (S_{уд}\rho d^2 + 4d), \quad (10.2)$$

$$2\sqrt{3}(S_{уд}\rho D - 4) \cdot (d^2 + 2dh + h^2) = \pi S_{уд}\rho D d^2 + 4\pi D d, \quad (10.3)$$

$$(2\sqrt{3}(S_{уд}\rho D - 4) - \pi S_{уд}\rho D) d^2 + (2\sqrt{3}(S_{уд}\rho D - 4)2h - 4\pi D) d + 2\sqrt{3}(S_{уд}\rho D - 4)h^2 = 0 \quad (10.4)$$

Для того, чтобы решить (10.4), запишем и вычислим его дискриминант:

$$\mathfrak{D} = [16(\sqrt{3}h(S_{уд}\rho D - 4) - \pi D)^2] - [8\sqrt{3}h^2(2\sqrt{3}(S_{уд}\rho D - 4) - \pi S_{уд}\rho D) \cdot (S_{уд}\rho D - 4)] \quad (11)$$

Дискриминант равен $\mathfrak{D} = 3,86 \cdot 10^{-13}$ (все линейные размеры выражены в метрах).

Тогда диаметр пор НУВ составляет

$$d = \frac{1,62 \cdot 10^{-6} \pm 2,62 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 26,83} \text{ м}, \quad (12)$$

$$d = 1,85 \cdot 10^{-8} \text{ м} = 18,5 \text{ нм}$$

$$\text{или } d = 4,17 \cdot 10^{-8} \text{ м} = 41,7 \text{ нм}.$$

3. Сопоставляя диаметр пор на рис. 2 условия с длиной бара на этих микрофотографиях, можно получить величины порядка 30 – 70 нм, следовательно, средний диаметр пор НУВ ближе к $d = 41,7$ нм, чем к $d = 18,5$ нм.

Поскольку $L' = L$, то объемная доля пор ω в волокне равна δ (см. (7)):

$$\omega = \delta = \frac{3,14 \cdot 41,7^2}{2\sqrt{3}(41,7 + 7)^2} = 0,665. \quad (13)$$