



Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 8. Супертетраэдр и Супертетраэдр Серпинского

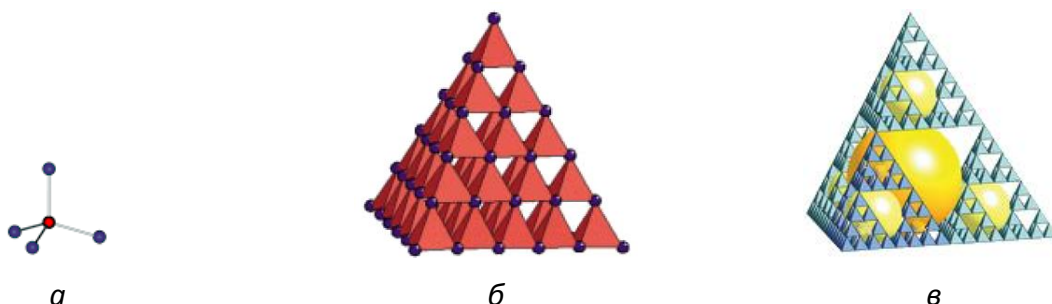


Рис. 1. а) Строение единичного тетраэдра MY_4 .

б) Пример сложенного из MY_4 супертетраэдра пятого поколения T_5 .

в) Пример сложенного из T_2 супертетраэдра Серпинского третьего поколения $S_3(T_2)$.

Некоторые бинарные соединения M_aY_b , в структуре которых атом металла M имеет тетраэдрическое окружение из атомов Y (рис. 1а), могут образовывать нанокластеры в форме супертетраэдров T_n (рис. 1б). Число тетраэдров MY_4 (n), приходящееся на ребро T_n , называется поколением супертетраэдра.

1. Найдите количество атомов M a_T и атомов Y b_T для

а) T_5 , (1,5 балла)

б) T_n . (3 балла)

Обратите внимание: в точках касания тетраэдры MY_4 имеют общие атомы Y .

Если взять четыре T_2 и из них, как из базовых фигур, сложить новый супертетраэдр второго поколения, а потом повторить операцию уже для этого супертетраэдра, и так несколько раз, то получится тетраэдрический кластер с фрактальной структурой (рис. 1в) – так называемый супертетраэдр Серпинского $S_m(T_2)$. Общее число этапов усложнения его структуры m называется поколением.

2. Найдите количество атомов M a_S и атомов Y b_S для

а) $S_3(T_2)$, (2 балла)

б) $S_m(T_2)$. (4 балла)

Полости в супертетраэдрах Серпинского можно использовать для хранения частиц-гостей.

3. Форму какого многогранника имеет центральная полость супертетраэдра Серпинского? (1,5 балла)

4. Рассчитайте размер нанокластера $S_2(T_2)$, а также максимальный диаметр сферической частицы, которая поместится в его полости, если расстояние между M и Y в MY_4 составляет $d = 0,24$ нм. Все атомы считать точечными. (3 балла)

Для решения задачи можно воспользоваться формулой n -го тетраэдрального числа

$$Td_n = (n^3 + 3n^2 + 2n)/6.$$

Всего – 15 баллов