# Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
# Решение задачи 8. Контактное число

1. Рассмотрим два круга равного диаметра, касающихся друг друга. Отрезок AB = 2r, соединяющий их центры, отрезок BC, представляющий собой касательную ко второму кругу, проведенную из центра первого и отрезок CA = r, соединяющий точку касания и центр второго круга, образуют прямоугольный ΔABC с углом

$$\alpha = \angle ABC = \arcsin\left(\frac{r}{2r}\right) = 30^\circ.$$

Таким образом, при касании двух кругов, один из них закрывает для другого «угол обзора», равный 2·30° = 60°. Следовательно, вокруг одного круга могут поместиться только $\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$ кругов того же радиуса.

2. Степень заполнения равна соотношению площади, занятой кругами, к площади треугольника, соединяющего центры трех соприкасающихся кругов радиуса **r**:

$$\varphi = \frac{S_o}{S_\Delta} = \frac{0{,}5 \cdot \pi r^2}{0{,}5(2r)^2 \sin 60^\circ} = \frac{\pi}{4 \cdot \sqrt{3}/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}91$$

$$N = \frac{S\varphi}{S_1} = \frac{4\pi R^2 \varphi}{\pi R_1^2} = \frac{4R^2\varphi}{R_1^2} = \frac{4 \cdot 10^2 \cdot 0{,}91}{0{,}1^2} = 36400$$

3. При касании двух шаров равного диаметра, один из них закрывает для второго «область обзора», которую можно представить в виде конуса с углом 60°. Такой конус отсекает на сфере радиуса **R’** шаровой сектор площадью

$$S_{at} = 2\pi R' h = 2\pi R'\left(R' - \sqrt{R'^2 - (R'/2)^2}\right) = 2\pi R'^2\left(1 - \sqrt{3}/2\right).$$

Это составляет

$$\frac{S_{at}}{S_s} = \frac{2\pi R'^2\left(1 - \sqrt{3}/2\right)}{4\pi R'^2} = 0{,}067$$

долю от общей площади сферы.

Таким образом, площадь сферы в $\frac{1}{0{,}067} = 14{,}93$ раза больше площади, занимаемой проекцией одного шара.

4. $S_{\Delta ABC} = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$,

где $\alpha = \beta = \gamma = \arccos\frac{1}{3}$ - двугранный угол в тетраэдре.

Тогда

$$\frac{S_s}{S_{\Delta ABC}} = \frac{4\pi R'^2}{R'^2\left(3\arccos(1/3) - \pi\right)} = \frac{4}{0{,}1755} = 22{,}79$$

сферических треугольника может разместиться на сфере.

Теорема Эйлера: **V – E + F = 2**.

**F** = 22 - число треугольных граней
**E** = 3/2**F** = 33 - число ребер (у каждой грани три ребра, каждое ребро принадлежит двум граням)

Следовательно, **V** = 2 – **F** + **E** = 2 – 22 + 33 = 13.