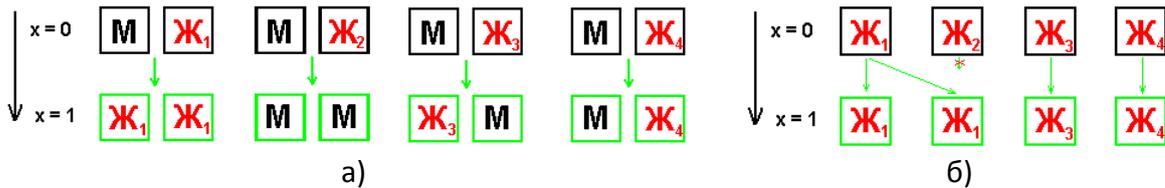


Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 7. Митохондриальная Ева и ближайший общий предок

1. В первом поколении в каждой семье рождается по 2 ребенка, следовательно, первое поколение состоит из родственных пар детей и $\omega_{n1} = 1/2 = 0,5$. Всего возможно 4 варианта пола детей в семье: ЖЖ, ММ, ЖМ, МЖ. Таким образом, передача митохондрий по материнской линии будет происходить в среднем для 3-х из 4-х женщин (см. рис), а также 3 из 4-х женщин будут иметь разных матерей. Следовательно, $\omega_{ne1} = 3/4 = 0,75$.



2.

- а. В поколении **1** из 2048 не более 2-х человек могут иметь одного и того же предка в поколении **0**.
 В поколении **2** из 2048 не более $2^2 = 4$ -х человек могут иметь одного и того же предка в поколении **0**.
 В поколении **3**, соответственно, $2^3 = 8$.
 В поколении **x** – 2^x .
 Если при этом общий родственник из поколения **0** есть у любого человека из популяции, то $2048 = 2^x$. Тогда $x = \log_2 2048 = 11$ и $t_{\min} = x \cdot t_0 = 11 \cdot 20 = \underline{\underline{220}}$ лет.
- б. Суммарное число предков у любого члена популяции из поколения, отвечающего времени t_{\min} , составляет

$$S = \sum_{k=1}^{11} 2^k = 2(2^{11} - 1) = \underline{\underline{4094}} \text{ человек.}$$

3. Пример программы на языке Pascal (PascalABC.NET <http://pascalabc.net/>):

```
{моделирование времени  $t_e$ , за которое возникает Митохондриальная Ева}
const n = 1024; {число женщин в популяции}
const t0 = 20; {время смены поколений}
var
    i, r, Ptmp, flag, x, te: integer;
    P: array[1..n] of integer;
BEGIN

x := 0; {начинаем с нулевого поколения}
for i := 1 to n do P[i] := i; {заполняем элементы массива P условными номерами от 1 до n мтДНК матерей из нулевого поколения}

{пока флаг равен единице (не все элементы в массиве P идентичны), производим циклическую смену поколений}
flag := 1;
while flag = 1 do
begin
    {для этого сначала случайным образом перемешиваем весь массив}
    for i := 1 to n do
```

```

begin

    r := Random(n) + 1;
    Ptmp := P[i];
    P[i] := P[r];
    P[r] := Ptmp;
end;

{передаем условные номера мтДНК матерей из поколения 0 в следующее поколение.
Представим массив P разбитым на четверки элементов: P[4*i+1] P[4*i+2]
P[4*i+3] P[4*i+4] (где i от 0 до 1024/4-1). Согласно п.1 решения,
необходимо заменить значение, например, второго элемента в четверке на
значение первого элемента}
    x := x + 1;
    for i := 0 to Round(n/4)-1 do P[4*i+2] := P[4*i+1];

{затем проверяем, имеются ли в массиве P не идентичные элементы, для этого
достаточно сравнить все элементы массива с первым; если все элементы
массива P будут равны первому (образовалась Ева), то флаг останется равным
нулю и цикл смены поколений прекратится}
    flag := 0;
    for i:=2 to n do if P[1] <> P[i] then flag := 1;
    end;
te := x*t0;
writeln ('Прошло ', te, ' лет');
END.

{моделирование времени te за которое возникает Митохондриальная Ева}
const n = 1024; {число женщин в популяции}
const t0 = 20; {время смены поколений}
var
    i, r, Ptmp, flag, x, te: integer;
    P: array[1..n] of integer;
BEGIN

x := 0; {начинаем с нулевого поколения}
for i := 1 to n do P[i] := i; {заполняем элементы массива P условными
номерами от 1 до n мтДНК матерей из нулевого поколения}

{пока флаг равен единице (не все элементы в массиве P идентичны),
производим циклическую смену поколений}
flag := 1;
while flag = 1 do
    begin
        {для этого сначала случайным образом перемешиваем весь массив}
        for i := 1 to n do
            begin
                r := Random(n) + 1;
                Ptmp := P[i];
                P[i] := P[r];
                P[r] := Ptmp;
            end;
    end;

{Передаем условные номера мтДНК матерей из поколения 0 в следующее
поколение. Представим массив P разбитым на четверки элементов: P[4*i+1]
P[4*i+2] P[4*i+3] P[4*i+4] (где i от 0 до 1024/4-1). Согласно п.1 решения,
необходимо заменить значение, например, второго элемента в четверке на
значение первого элемента}
    x := x + 1;
    for i := 0 to Round(n/4)-1 do P[4*i+2] := P[4*i+1];

```

```
{затем проверяем, имеются ли в массиве P не идентичные элементы, для этого достаточно сравнить все элементы массива с первым; если все элементы массива P будут равны первому (образовалась Ева), то флаг останется равным нулю и цикл смены поколений прекратится}
flag := 0;
for i:=2 to n do if P[1] <> P[i] then flag := 1;
end;
te := x*t0;
writeln ('Прошло ', te, ' лет');
END.
```

Пример 20 значений числа поколений t_e , полученных в результате работы программы:

106580 57940 128300 43760 40460 54860 77680 57940 47860 150720 166480 99020
74120 50340 55920 57700 44160 101000 74740 81540

Усредняя, получаем $t_{\text{ср}} = 78556$ лет. Полученное экспериментально таким способом $t_{\text{ср}}$ обычно находится в пределах 60 000 – 100 000 лет.

Справочное значение составляет $t_{\text{ср}} = t_0 2^n = 81920$ лет (эта цифра будет использована для дальнейших расчетов)

$$t_e/t_{\text{min}} = 81920/220 \approx 372.$$

4. $n = 200000/81920 \cdot 2048 = 5000$ человек.

Комментарии к решению. Популяция превращается в одну родственную группу (т.е., возникает БОП) быстрее, чем в ней возникает митохондриальная Ева. Время возникновения БОП, как правило, пропорционально логарифму размера популяции, а время возникновения митохондриальной Евы пропорционально размеру популяции. По некоторым данным, все человечество примерно 130 000 лет назад состояло из нескольких десятков тысяч человек. Использование даже такой грубой модели дает близкую по порядку величины оценку.