Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Решение задачи 4. Фаграфен

1.

а. В структуре фаграфена мы можем выделить три неэквивалентных по числу вершин многоугольника: **М5**, **М6** и **М7**, содержащие 5, 6 и 7 углов, соответственно. В то же время, можно видеть, что в структуре фаграфена шестиугольники имеют два типа окружения (обходим шестиугольник по часовой стрелке): 5-6’-7-5-6’-7 (**М6**) и 6’-7-6’-7-6-5 (**М6’**).

То есть, <u>всего 4 типа неэквивалентных многоугольников</u>: М5, М6, М6’ и М7.

б.

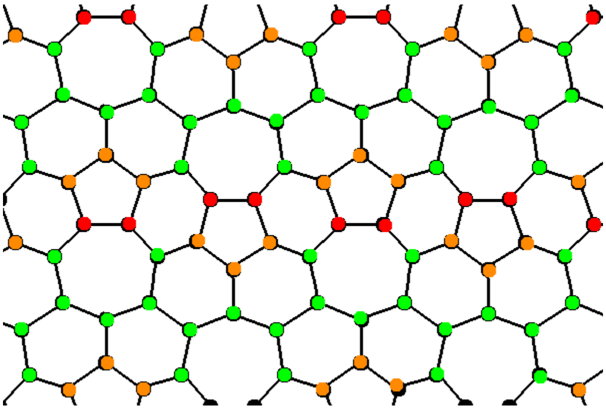

Рис. 1.

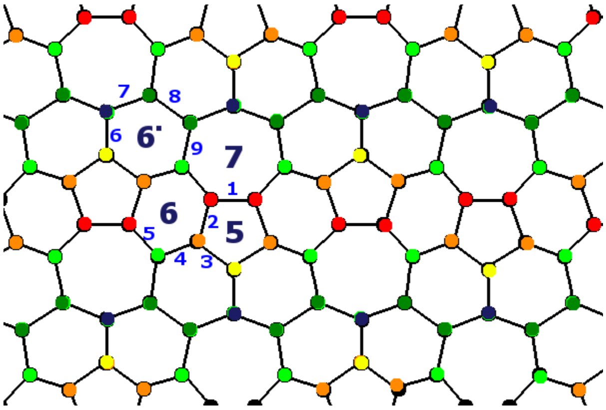

Рис. 2.

На первый взгляд (рис. 1), можно выделить три типа неэквивалентных узлов двумерной структуры (запишем цифрами встречающиеся возле узла многоугольники):

- **У1**: 567 (красный),
- **У2_0**: 566 (оранжевый)
- и **У3_0**: 667 (салатовый).

Но, поскольку, как мы уже выяснили, шестиугольники неодинаковы, то всего можно выделить <u>6 типов неэквивалентных узлов</u> двумерной структуры (рис. 2):

- **У1**: 567 (красный),
- **У2**: 566’ (оранжевый),
- **У3**: 56’6’ (желтый),
- **У4**: 66’7 (салатовый),
- **У5**: 6’6’7 (зеленый, принадлежит ребру, соединяющей два М7)
- и **У6**: 6’6’7 (темно-синий, принадлежит ребру, соединяющей М5 и М7).

в. В фаграфене можно выделить <u>9 неэквивалентных видов ребер</u> (см. рис. 2) (запишем типы узлов, которые соединяют эти ребра):

- **Р1**: У1-У1,
- **Р2**: У1-У2,
- **Р3**: У2-У3,
- **Р4**: У2-У4,
- **Р5**: У1-У4,
- **Р6**: У3-У6,
- **Р7**: У5-У6,
- **Р8**: У5-У5,
- **Р9**: У4-У5.

2. Один из вариантов выбора минимальной ячейки фаграфена отмечен на рис. 3 (вершины ячейки лежат в центрах семиугольников).

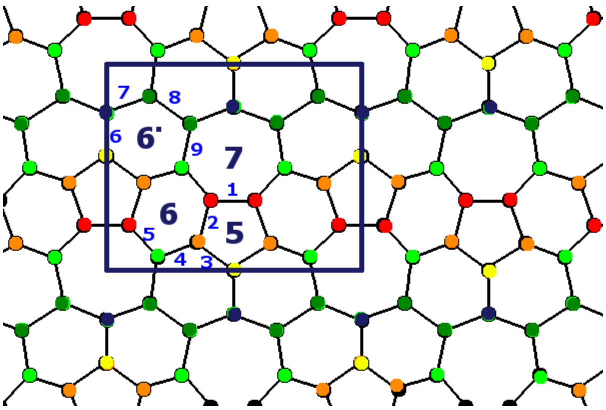

Рис. 3.

На такую ячейку приходится:

- 4**У1** + 4**У2** + 4/2**У3** + 4**У4** + 4**У5** + (1 + 2/2)**У6** = <u>**20**</u> узлов (атомов углерода),
- 1 + 2/2 = <u>2 М5</u> пятиугольника,
- <u>2 М6</u> шестиугольника первого типа,
- 2 + 6/3 = <u>4 М6’</u> шестиугольника второго типа
- и 1 + 4/4 = <u>2 М7</u> семиугольника.

3. Чтобы сходящиеся в узловой точке ребра лежали в одной плоскости, необходимо, чтобы сумма плоских углов между ними была равна 360°.

Угол в правильном шестиугольнике равен 120°, поэтому графеновая сетка, в каждом узле которой сходится по 3 шестиугольника, будет плоской.

В то же время, угол в правильном пятиугольнике равен 108°, а в семиугольнике − примерно 128,6°. Тогда

- угол при узле **У1**(567) равен 356,6°,
- угол при узле **У2$_0$**(566) равен 348°
- и угол при узле **У3$_0$**(667) равен 368,6°,

то есть, ни один из узлов в структуре фаграфена не будет плоским.

Следовательно, фаграфен, составленный из правильных многоугольников не может быть плоским.