математика

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 9. Фуллерены

1. Обозначим **V** = **n** – число вершин, тогда число ребер **E** = 1,5**V** = 1,5**n** (в каждой вершине сходится по 3 ребра, но каждое ребро принадлежит двум вершинам).

   а) **n** = 2017: **E** = 3025,5 – ответ не имеет смысла, возможно, данный фуллерен не существует.

   б) **n** = 2018: **E** = 3027, из них одинарных $\mathbf{E}_1$ = 2/3 **E** = 2018 и двойных $\mathbf{E}_2$ = 1/3 **E** = 1009.

2. Общее число граней можно записать как $\mathbf{F} = \mathbf{F_5} + \mathbf{F_6}$.

   Выразим число вершин через число граней: $\mathbf{V} = 5/3\mathbf{F_5} + 6/3\mathbf{F_6}$ (каждая пяти- (шестиугольная) грань дает 5 (6) вершин, но каждая вершина принадлежит трем граням). Тогда число ребер $\mathbf{E} = 1{,}5(5/3\mathbf{F_5} + 2\mathbf{F_6}) = 2{,}5\mathbf{F_5} + 3\mathbf{F_6}$.

3. Запишем теорему Эйлера для выпуклых многогранников: **V** + **F** – **E** = 2.

   Таким образом, $5/3\mathbf{F_5} + 2\mathbf{F_6} + \mathbf{F_5} + \mathbf{F_6} - 2{,}5\mathbf{F_5} - 3\mathbf{F_6} = 2$ или $\mathbf{F_5} = 12$. То есть любой многогранник, составленный из пяти- и шестиугольников, сходящихся в вершинах по три, всегда содержит строго 12 пятиугольников.

4. Рассчитаем число шестиугольников: $F_6 = \dfrac{V - 5/3F_5}{2} = \dfrac{n - 5/3 \cdot 12}{2} = 0{,}5n - 10$.

   а) 2017: $\mathbf{F_6} = 0{,}5 \cdot 2017 - 10 = 998{,}5$ – ответ не имеет смысла, возможно, данный фуллерен не существует.

   б) 2018: $\mathbf{F_6} = 0{,}5 \cdot 2018 - 10 = 999$.