

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 7. Митохондриальная Ева и ближайший общий предок

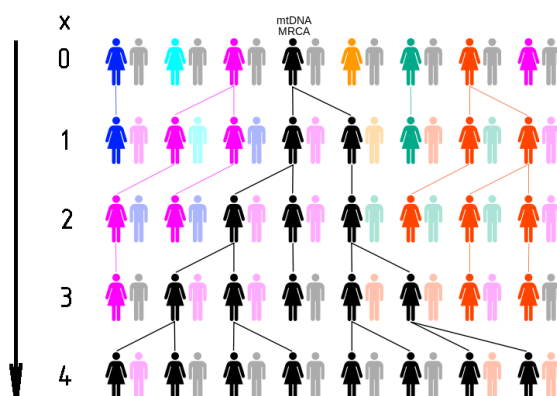


Рис. Пример эволюции популяции из $n = 16$ человек со случайным возникновением митохондриальной Евы уже в четвертом поколении ($x = 4$).

У всех людей есть предки. Чем дальше уходим вглубь веков, тем больше предков у каждого из нас, и тем больше людей имеют общих предков. Поэтому можно найти такое время (~5 000 лет назад), в котором жил ближайший общий предок (БОП) всех людей.

Однако, если считать родство по митохондриям (которые наследуются только по материнской линии), то ближайшим общим предком, от которого все современное человечество унаследовало митохондриальную ДНК, будет жившая в Африке около 200 000 лет назад женщина – «митохондриальная Ева».

Чтобы понять феномен возникновения Евы, а также, почему она намного старше БОП всех ныне живущих людей, рассмотрим простую математическую модель: популяцию, состоящую в нулевом поколении из $n = 2048$ неродственных людей, мужчин и женщин поровну. Браки в этой популяции случайны, в каждой семье всегда рождается по 2 ребенка, вероятность того, что ребенок будет мальчиком или девочкой равна 50%, а между сменой поколений проходит $t_0 = 20$ лет.

1. Для первого поколения ($x = 1$) рассчитайте:
 - а. в популяции – долю групп людей, имеющих одинаковых предков (ω_{n1}) **(1 балл)**
 - б. среди женщин популяции – долю групп женщин, имеющих одинаковых матерей (ω_{ne1}) **(1 балл)**
2.
 - а. Найдите, чему равно минимальное время t_{min} , за которое у всех членов рассматриваемой популяции может возникнуть общий предок в нулевом поколении. **(2.5 балла)**
 - б. Каково при этом суммарное число всех предков у произвольного человека из поколения, отвечающего времени t_{min} ? **(1 балл)**
3. Путем компьютерного моделирования* найдите среднее время t_e , за которое в рассмотренной популяции возникает митохондриальная Ева. **(7 баллов)** Во сколько раз t_e больше t_{min} ? **(1 балл)**
4. Считая, что t_e пропорционально n , оцените размер популяции, в которой по прошествии 200 000 лет возникла митохондриальная Ева. **(1.5 балла)**

*Напишите программу (на любом языке программирования), которая будет осуществлять смену поколений соответственно модели, для каждого поколения находить остающееся в популяции число общих матерей из поколения $x = 0$, до тех пор, пока не останется лишь одна. Приведите в ответе исходный код и коротко опишите алгоритм программы.

Подсказка для компьютерного моделирования:

- можно рассматривать только женскую часть популяции;
- величиной t_e считать время, через которое все женщины популяции будут иметь одну общую мать из нулевого поколения;
- поскольку получаемая величина t_e подвержена случайным изменениям, то моделирование необходимо повторить 10–20 раз и полученные значения усреднить;
- перед каждой сменой поколений всю популяцию можно разбивать случайным образом на группы некоторого минимального размера, в каждой из которых выполнить смену поколений по единому для всех этих групп алгоритму.

Всего – 15 баллов