Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 9. Чертова дюжина

1. Число граней $F = F_3 + F_4 + F_6$,

вершин $V = \dfrac{3F_3 + 4F_4 + 6F_6}{m} = 12$ (каждая вершина принадлежит **m** ребрам),

ребер $E = \dfrac{3F_3 + 4F_4 + 6F_6}{2} = \dfrac{mV}{2} = 6m$ (каждое ребро принадлежит двум граням).

Запишем для искомых многогранников:

1) число граней $F = F_3 + F_4 + F_6$ (треугольные, квадратные и шестиугольные),
2) вершин $V = \dfrac{3F_3 + 4F_4 + 6F_6}{m} = 12$ (каждая вершина принадлежит **m** ребрам),
3) ребер $E = \dfrac{3F_3 + 4F_4 + 6F_6}{2} = \dfrac{mV}{2} = 6m$ (каждое ребро принадлежит двум граням).

Тогда теорема Эйлера:

$$12 - 6m + F_3 + F_4 + F_6 = 2$$

или

$$F_3 + F_4 + F_6 = 6m - 10$$

В тоже время,

$$3F_3 + 4F_4 + 6F_6 = 12m\,.$$

Таким образом, получена система из двух уравнений с четырьмя неизвестными. Для нахождения всех возможных решений поварьируем значение **m**, а также все возможные пары типов граней.

1) **m** = 3

$F_3 + F_4 + F_6 = 8$

$3F_3 + 4F_4 + 6F_6 = 36$

1.1) $F_3 = 0$

$\begin{array}{lll} F_4 + F_6 = 8 & F_4 = 8 - F_6 & F_6 = 2 \\ 4F_4 + 6F_6 = 36, & 4(8 - F_6) + 6F_6 = 36, & F_4 = 6 \end{array}$

Многогранник – <u>шестиугольная призма</u> (2 шестиугольных и 6 квадратных граней, 18 ребер).

1.2) $F_4 = 0$

$\begin{array}{lll} F_3 + F_6 = 8 & F_3 = 8 - F_6 & F_6 = 4 \\ 3F_3 + 6F_6 = 36, & 3(8 - F_6) + 6F_6 = 36, & F_3 = 4 \end{array}$

Многогранник – усеченный тетраэдр (4 шестиугольных и 4 треугольных грани, 18 ребер).

1.3) $F_6 = 0$

$\begin{array}{l} F_3 + F_4 = 8 \\ 3F_3 + 4F_4 = 36 \end{array}$, $\begin{array}{l} F_3 = 8 - F_4 \\ 3(8 - F_4) + 4F_4 = 36 \end{array}$, $\begin{array}{l} F_4 = 12 \\ F_3 = -4 \end{array}$,

нет решения в натуральных числах

2) **m** = 4

$$\begin{array}{l} F_3 + F_4 + F_6 = 14 \\ 3F_3 + 4F_4 + 6F_6 = 48 \end{array}$$

2.1) $F_3 = 0$

$\begin{array}{l} F_4 + F_6 = 14 \\ 4F_4 + 6F_6 = 48 \end{array}$, $\begin{array}{l} F_4 = 14 - F_6 \\ 4F(14 - F_6) + 6F_6 = 48 \end{array}$, $\begin{array}{l} F_6 = -4 \\ F_4 = 18 \end{array}$,

нет решения в натуральных числах

2.2) $F_4 = 0$

$\begin{array}{l} F_3 + F_6 = 14 \\ 3F_3 + 6F_6 = 48 \end{array}$, $\begin{array}{l} F_3 = 14 - F_6 \\ 3(14 - F_6) + 6F_6 = 48 \end{array}$, $\begin{array}{l} F_6 = 2 \\ F_3 = 12 \end{array}$

Многогранник – шестиугольная антипризма (2 шестиугольных и 12 треугольных граней, 24 ребра).

2.3) $F_6 = 0$

$\begin{array}{l} F_3 + F_4 = 14 \\ 3F_3 + 4F_4 = 48 \end{array}$, $\begin{array}{l} F_3 = 14 - F_4 \\ 3(14 - F_4) + 4F_4 = 48 \end{array}$, $\begin{array}{l} F_4 = 6 \\ F_3 = 8 \end{array}$

Многогранник – кубооктаэдр (трехскатный повернутый бикупол), а также трехскатный прямой бикупол (6 квадратных и 8 треугольных граней, 24 ребра).

3) **m** = 5

$$\begin{array}{l} F_3 + F_4 + F_6 = 20 \\ 3F_3 + 4F_4 + 6F_6 = 60 \end{array}$$

3.1) $F_3 = 0$

$\begin{array}{l} F_4 + F_6 = 20 \\ 4F_4 + 6F_6 = 60 \end{array}$, $\begin{array}{l} F_4 = 20 - F_6 \\ 4(20 - F_6) + 6F_6 = 60 \end{array}$, $\begin{array}{l} F_6 = -10 \\ F_4 = 30 \end{array}$,

нет решения в натуральных числах

3.2) $F_4 = 0$

$\begin{array}{l} F_3 + F_6 = 20 \\ 3F_3 + 6F_6 = 60 \end{array}$, $\begin{array}{l} F_3 = 20 - F_6 \\ 3(20 - F_6) + 6F_6 = 60 \end{array}$, $\begin{array}{l} F_6 = 0 \\ F_3 = 20 \end{array}$

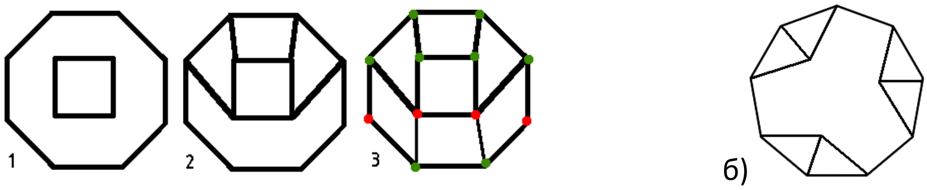
Многогранник – икосаэдр (20 треугольных граней, 30 ребер).

3.3) $F_6 = 0$

$$F_3 + F_4 = 20 \qquad F_3 = 20 - F_4 \qquad F_6 = 0$$
$$3F_3 + 4F_4 = 60, \qquad 3F(20 - F_4) + 4F_4 = 60, \qquad F_3 = 20$$

Многогранник – икосаэдр (20 треугольных граней, 30 ребер).

При наличии у искомого многогранника граней F_n с $n \geq 7$ возможны еще 4 решения:
m = 3, $F_3 = 5$, $F_7 = 3$ – тип 1 (невозможно построить),
m = 3, $F_3 = 6$, $F_9 = 2$ – тип 2 (невозможно построить для граней в виде правильных многоугольников),
m = 3, $F_4 = 7$, $F_8 = 1$ – тип 3 (невозможно построить),
m = 4, $F_3 = 13$, $F_9 = 1$ – тип 4 (невозможно построить).
Невозможно построить: значит, что, нарисовав один из многоугольников и пытаясь расположить внутри него оставшиеся вершины (чтобы построить плоскую проекцию) согласно найденным решениям, мы неизбежно приходим к противоречию, см. пример на рис. а.3)



а) б)

Рис. а) Попытка построения плоской проекции многогранника типа 3 (остаются вершины с m ≠ 3), б) многогранник типа 2, один из девятиугольников которого не является правильным.

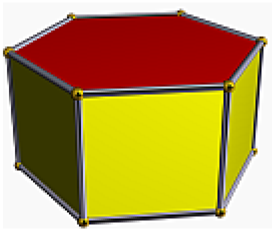
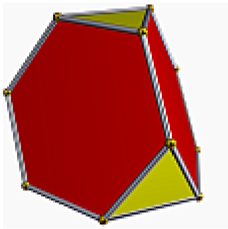
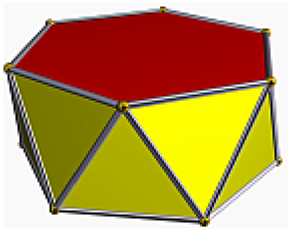
2. При наличии поворотной оси пятого порядка возможны два варианта размещения атомов относительно нее: либо атом лежит на этой оси, либо пять атомов переводятся друг в друга при повороте (т.е., ось проходит через центр пятиугольной грани). Второй вариант невозможен по условию.

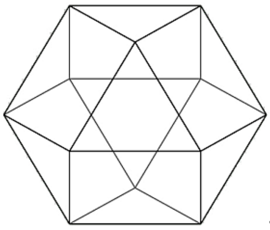
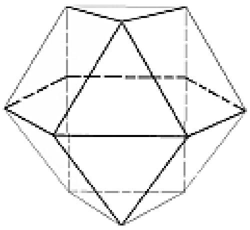
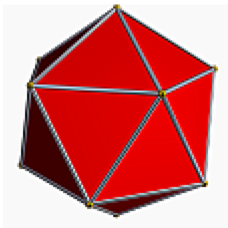
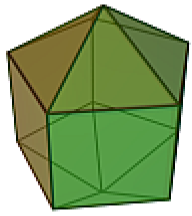
   Таким образом, при реализации первого варианта два атома из 12-ти лежат на поворотной оси пятого порядка, а остальные 10 разбиты на 5 идентичных групп (по 2 атома), которые переводятся друг в друга поворотом вокруг оси.

   Взаимное расположение пятерки атомов вокруг атома, лежащего на поворотной оси, задано симметрией, поэтому оболочку можно представить соединенной из 2-х шапочек 1+5 (пятиугольная пирамида).

   Такие шапочки можно скомбинировать либо с поворотом на угол $\frac{\pi}{5}$ друг относительно друга – получив при этом уже ранее найденный икосаэдр, либо симметрично (атом над атомом) – получив при этом удлиненную пятиугольную бипирамиду (10 треугольных и 5 квадратных граней, 25 ребер).

3. 1) Шестиугольная призма (2 шестиугольных и 6 квадратных граней, 18 ребер).
   2) Усеченный тетраэдр (4 шестиугольных и 4 треугольных грани, 18 ребер).
   3) Шестиугольная антипризма (2 шестиугольных и 12 треугольных граней, 24 ребра).
   4а) Кубооктаэдр (трехскатный повернутый бикупол), а также 4б) трехскатный прямой бикупол (6 квадратных и 8 треугольных граней, 24 ребра).
   5) Икосаэдр (20 треугольных граней, 30 ребер).
   6) Удлиненная пятиугольная бипирамида (10 треугольных и 5 квадратных граней, 25 ребер).

1)  2)  3) 

4а)  4б)  5)  6) 

4.

1) Шестиугольная призма

Все соседние атомы в оболочке касаются друг друга (по ребрам многогранника), то есть, расстояние между центрами пары атомов в оболочке равно 2r.

Расстояние между центром центрального атома и центром любого атома оболочки равно радиусу сферы, описанной вокруг правильной шестиугольной призмы:

$$R = \sqrt{a^2 + (a/2)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a = \sqrt{5}r$$

, где a = 2r – длина ребра призмы, образованной центрами атомов оболочки.

$\sqrt{5}r > 2r$ - касания центрального атома с атомами оболочки нет (кластер типа а).

2) Усеченный тетраэдр

Все соседние атомы в оболочке касаются друг друга (по ребрам многогранника), то есть, расстояние между центрами пары атомов в оболочке равно 2r.

Расстояние между центром центрального атома и центром любого атома оболочки равно радиусу сферы, описанной вокруг усеченного тетраэдра:

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{22} = \frac{2r}{4}\sqrt{22} = \frac{r\sqrt{22}}{2}$$

, где a = 2r – длина ребра усеченного тетраэдра, образованного центрами атомов оболочки.

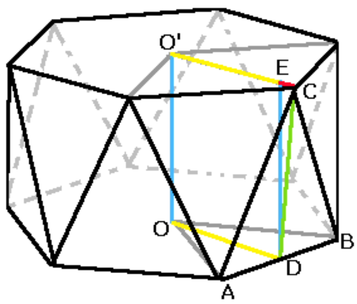
$\frac{r\sqrt{22}}{2} > 2r$ - касания центрального атома с атомами оболочки нет (кластер типа а).

3) Шестиугольная антипризма

Все соседние атомы в оболочке касаются друг друга (по ребрам многогранника), то есть, расстояние между центрами пары атомов в оболочке равно 2r. Расстояние между центром центрального атома и центром любого атома оболочки равно радиусу сферы, описанной вокруг правильной шестиугольной антипризмы:

$$R = \sqrt{a^2 + (H/2)^2} = \sqrt{4r^2 + r^2\left(\sqrt{3} - 1\right)} = r\sqrt{3 + \sqrt{3}},$$

где $a = 2r$ – длина ребра шестиугольной антипризмы, образованной центрами атомов оболочки, H – ее высота.



Расчет высоты: по условию, **H** = **OO’** = **ED** и **AB** = **AC** = **BC** = **O’C** = **a**. Рассмотрим Δ**CDE**. **DC** = **OD** = **EO’** = **h**,

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ - высота правильного треугольника со стороной **a**.

CE = **O’C** – **EO’** = $a - \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a\left(2 - \sqrt{3}\right)}{2} = b$.

$$H = \sqrt{h^2 - b^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2\left(2 - \sqrt{3}\right)^2}{4}} = a\sqrt{\sqrt{3} - 1}.$$

$r\sqrt{3 + \sqrt{3}} > 2r$ - касания центрального атома с атомами оболочки нет (кластер типа а).

4) Кубооктаэдр, а также трехскатный прямой бикупол

Все соседние атомы в оболочке касаются друг друга (по ребрам многогранника), то есть, расстояние между центрами пары атомов в оболочке равно 2r. Расстояние между центром центрального атома и центром любого атома оболочки равно радиусу сферы, описанной вокруг кубооктаэдра (трехскатного прямого бикупола) и равно длине его ребра, то есть расстоянию между центрами атомов в оболочке: $R = a = 2r$. Следовательно, все атомы оболочки касаются центрального атома (кластер типа б).

5) Икосаэдр

Предположим, что все соседние атомы в оболочке касаются друг друга (по ребрам многогранника), то есть, расстояние между центрами пары атомов в оболочке равно 2r. Тогда расстояние между центром центрального атома и центром любого атома оболочки равно радиусу сферы, описанной вокруг икосаэдра:

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}a = \frac{r}{2}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)},$$

где a = 2r – длина ребра икосаэдра, образованного центрами атомов оболочки.

Но

$$\frac{r}{2}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)} < 2r,$$

то есть, при условии касания соседних атомов оболочки мы не сможем поместить еще один атом в центр икосаэдра. Следовательно, центральный атом в икосаэдре касается каждого из атомов оболочки, а соседние атомы оболочки не касаются друг друга (кластер типа в).

6) Удлиненная пятиугольная бипирамида

Предположим, что все соседние атомы в оболочке касаются друг друга (по ребрам многогранника), то есть, расстояние между центрами пары атомов в оболочке равно 2r. Тогда несложно заметить, что расстояние между центром центрального атома и центрами атомов оболочки будет неодинаково: атомы, лежащие на поворотной оси пятого порядка, будут отстоять от центрального дальше, чем остальные 10 атомов. Следовательно, центральный атом в удлиненной пятиугольной бипирамиде касается каждого из атомов оболочки, но не все соседние атомы оболочки касаются друг друга (кластер типа в).

5.

1) Шестиугольная призма

Радиус сферы, описанной около кластера в форме правильной шестиугольной призмы, равен

$$R + r = r\left(\sqrt{5}+1\right) = 0{,}14\left(\sqrt{5}+1\right) = 0{,}45 \text{ нм.}$$

2) Усеченный тетраэдр

Радиус сферы, описанной около кластера в форме усеченного тетраэдра, равен

$$R + r = r\left(\frac{\sqrt{22}}{2}+1\right) = 0{,}14\left(\frac{\sqrt{22}}{2}+1\right) = 0{,}47 \text{ нм.}$$

3) Шестиугольная антипризма

Радиус сферы, описанной около кластера в форме шестиугольной антипризмы, равен

$$R + r = r\left(\sqrt{3+\sqrt{3}}+1\right) = 0{,}14\left(\sqrt{3+\sqrt{3}}+1\right) = 0{,}44 \text{ нм.}$$

4) Кубооктаэдр, а также трехскатный прямой бикупол
Радиус сферы, описанной около кластера в форме кубооктаэдра (трехскатного прямого бикупола), равен
$$R + r = 3r = 0{,}14 \cdot 3 = 0{,}42 \text{ нм.}$$

5) Икосаэдр
Радиус сферы, описанной вокруг икосаэдра, образованного центрами атомов оболочки, равен $R = 2r$, а длина ребра этого икосаэдра –
$$a = \frac{8r}{\sqrt{2\left(5 + \sqrt{5}\right)}}.$$
Радиус сферы, описанной около кластера в форме икосаэдра, равен
$$R + r = 3r = 0{,}14 \cdot 3 = 0{,}42 \text{ нм.}$$

6) Удлиненная пятиугольная бипирамида
Радиус сферы, описанной вокруг усеченного декаэдра, образованного центрами атомов оболочки, равен $R = 2r$.
Радиус сферы, описанной около кластера в форме усеченного декаэдра, равен
$$R + r = 3r = 0{,}14 \cdot 3 = 0{,}42 \text{ нм.}$$