

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

Решение задачи 3. Рост дендримера

1. Число мономерных звеньев в поколении i при условии постоянного значения величины коэффициента ветвления $k = 2$ равно $N_i = 3 \cdot 2^{i-1}$ (так как в первом поколении число мономерных звеньев равно трем).

Общая площадь поверхности молекулы i -го поколения составляет $S = 4\pi R_i^2 = 4\pi(il)^2$.

При этом одно мономерное звено занимает площадь $S_1 = \pi r^2 / \varphi = \pi r^2 / (\pi/4) = 4r^2$, где φ – доля площади, занимаемая кругом при плотном заполнении плоскости.

Таким образом, максимальное число мономерных звеньев в i -м поколении составляет

$$N'_i = \frac{4\pi(il)^2}{4r^2} = \frac{\pi(il)^2}{r^2}.$$

Максимальным поколением с $k = 2$ будет поколение, для которого еще выполняется условие

$$\frac{N'_i}{N_i} = \frac{\pi(il)^2 / r^2}{3 \cdot 2^{i-1}} \geq 1.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
16,74	33,49	37,68	33,49	26,17	18,84	12,82	8,37	5,30	3,27	1,98	1,18	0,69

Тогда $R_{i=12} = 12 \cdot l = 12$ нм.

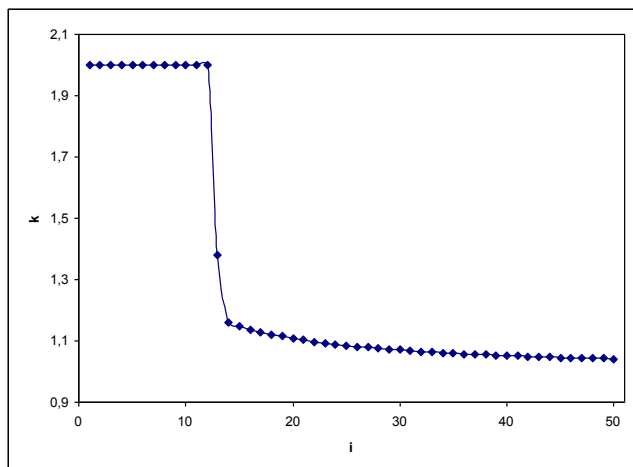
2. Для поколений с $i > i'$ максимальное число мономерных звеньев, которое может быть размещено в слое, будет меньше, чем отвечающее условию $k = 2$. То есть, произойдет снижение величины коэффициента ветвления:

$$k_{13} = \frac{N'_{13}}{N_{12}} = \frac{8490}{6144} = 1,38.$$

3. Для $i \geq 14$ величина коэффициента ветвления составляет

$$k_i = \left(1 - \frac{1}{i-1}\right)^2.$$

Построим график зависимости $k(i)$ на основании всех данных, полученных ранее:



Для бесконечно большой молекулы дендримера значение коэффициента ветвления будет стремиться к $\lim_{i \rightarrow \infty} k_i = 1$, то есть прирост ветвей будет происходить линейно, без разветвлений.