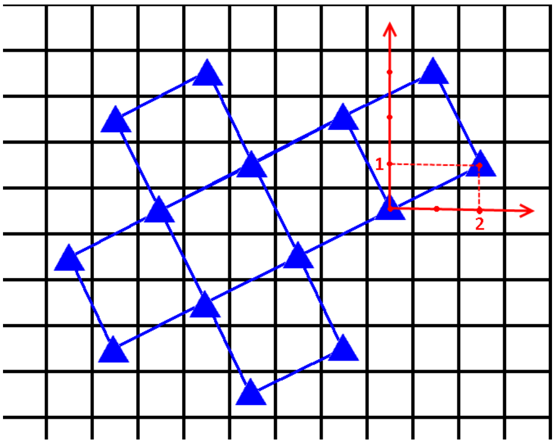
Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Решение задачи 9. Четырехвалентные многогранники Гольдберга

1. Развертка каркаса **Г** состоит из шести квадратов, то есть, представляет собой развертку поверхности куба с вершинами в точках, отмеченных треугольниками (рис. 1б условия).

2. Чтобы задать развертку куба, достаточно однозначно определить одно из его ребер в прямоугольной системе координат, связанной с сеткой квадратов, образованных атомами металла, соединенными органическими «мостиками»:



Ребро каркаса **А** задается параметрами (2, 1).

3. Обозначим длину единичного отрезка, задающего сетку квадратов, как **r**. Тогда длину стороны квадратной грани развертки можно рассчитать по теореме Пифагора как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами **ar** и **br**:

$$\mathbf{K} = \sqrt{a^2r^2 + b^2r^2} = \sqrt{a^2 + b^2}\,\mathbf{r}.$$

Площадь развертки каркаса **Г**, в свою очередь, представляет собой сумму площадей шести квадратов со стороной **K**:

$$\mathbf{S} = 6\mathbf{K}^2 = 6(\sqrt{a^2 + b^2}\,\mathbf{r})^2 = 6(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)\mathbf{r}^2.$$

В тоже время, на площадь одного квадрата сетки $\mathbf{S_1} = \mathbf{r}^2$ приходится 4·1/4 = 1 атом металла, лежащий в вершинах квадратов сетки.

Следовательно, общее число атомов металла, приходящееся на развертку каркаса **Г**, составляет

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}/\mathbf{S_1} = 6(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2).$$

Для каркаса **А** общее число атомов металла равно

$$\mathbf{M}(2, 1) = 6(2^2 + 1^2) = 30.$$

Или, по рис. 1б условия: на каждый квадрат развертки приходится 5 атомов металла, всего таких квадратов 6. Таким образом, общее число атомов металла в каркасе **А** равно **M** = 5·6 = 30.

4. Запишем теорему Эйлера для выпуклых многогранников:

$$\mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F} = 2,$$

где для многогранника, составленного из треугольников и квадратов, сходящихся в каждой вершине по четыре,

$$\text{число вершин } \mathbf{V} = 3/4\mathbf{F_3} + 4/4\mathbf{F_4},$$
$$\text{число ребер } \mathbf{E} = 3/2\mathbf{F_3} + 4/2\mathbf{F_4} = 2\mathbf{V},$$
$$\text{число граней } \mathbf{F} = \mathbf{F_3} + \mathbf{F_4}.$$

Тогда

$$3/4\mathbf{F_3} + 4/4\mathbf{F_4} - 3/2\mathbf{F_3} - 4/2\mathbf{F_4} + \mathbf{F_3} + \mathbf{F_4} = 2$$
$$1/4\mathbf{F_3} = 2$$
$$\mathbf{F_3} = 8$$

Выведем из формулы Эйлера значение **F** и запишем его через параметры (**a**, **b**) для каркаса:

$$\mathbf{F} = 2 - \mathbf{V} + \mathbf{E} = 2 - \mathbf{V} + 2\mathbf{V} = 2 + \mathbf{V}$$
$$\mathbf{F} = 2 + \mathbf{M} = 2 + 6(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)$$

Тогда

$$\mathbf{F_4} = \mathbf{F} - \mathbf{F_3} = 2 + \mathbf{M} - 8 = \mathbf{M} - 6 = 6(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) - 6.$$

Следовательно, для каркаса **A**

$$\mathbf{F_3} = 8,$$
$$\mathbf{F_4} = 6(2^2 + 1^2) - 6 = 24.$$

5. Поскольку $\mathbf{M} = 6(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)$, следовательно, одно из главных условий проверки существования каркаса **Г** – это проверка делимости **M** на 6.

   а. $\mathbf{M} = 2022 = 6 \cdot 337$, что отвечает каркасу **Г** с параметрами (16, 9):

   $$337 = 16^2 + 9^2.$$

   б. $\mathbf{L} = 2022$, $\mathbf{M} = 0{,}5\mathbf{L} = 1011$, не делится на 6 – такой каркас не существует.

   в. $\mathbf{F_3} = 2022$, не существует, поскольку в каркасе **Г** строго 8 треугольных граней.

   г. $\mathbf{F_4} = 2022$, $\mathbf{M} = \mathbf{F_4} + 6 = 2028 = 6 \cdot 338$,

   что отвечает двум вариантам каркаса **Г**, с параметрами (15, 13) и (17, 7):

   $$338 = 15^2 + 13^2 = 17^2 + 7^2.$$

   д. $\mathbf{F} = 2022$, $\mathbf{M} = \mathbf{F} - 2 = 2020$, не делится на 6 – такой каркас не существует.