Математика для школьников 7 – 11 класса (заключительный этап)
Сложные задачи. Решения

Решение задачи 6. Изомерия фуллереновых матрешек (20 баллов)

1.

1.1. Поскольку матрешка изомерна фуллерену, то выполняется следующее условие:

$$20(n_1^2+n_1m_1+m_1^2)+20(n_2^2+n_2m_2+m_2^2)=20(n_3^2+n_3m_3+m_3^2)$$

или, подставляя значения индексов для пары «матрешка-фуллерен» I типа, получаем выражение

$$n_1^2+n_1\cdot 0+0^2+n_2^2+n_2\cdot 0+0^2=n_3^2+n_3\cdot 0+0^2 \ (1)$$
$$n_1^2+n_2^2=n_3^2.$$

В свою очередь, подставляя значения индексов для пары «матрешка-фуллерен» II типа, получаем выражение:

$$n_1^2+n_1n_1+n_1^2+n_2^2+n_2n_2+n_2^2=n_3^2+n_3n_3+n_3^2 \ (2)$$
$$3n_1^2+3n_2^2=3n_3^2,$$

которое упрощается до $n_1^2+n_2^2=n_3^2$ (3).

Поскольку уравнения (1) и (2) сводятся к единому уравнению (3), то последовательность чисел **n_1**, **n_2** и **n_3**, являющаяся решением уравнения (1), одновременно является решением уравнения (2). То есть, если существует изомерная пара I типа с **n_1**, **n_2** и **n_3**, то, однозначно существует и изомерная пара II типа с теми же параметрами.

1.2. Поскольку **n_1**, **n_2** и **n_3** образуют арифметическую прогрессию с шагом 1, то

n_2 = **n_1** + 1, **n_3** = **n_2** + 1 = **n_1** + 2.

Подставляя данные выражения в уравнение (3), получаем:

$$n_1^2+(n_1+1)^2=(n_1+2)^2$$
$$n_1^2+n_1^2+2n_1+1=n_1^2+4n_1+4$$
$$n_1^2-2n_1-3=0 \ (4).$$

Решая квадратное уравнение (4), получаем два корня:

n_1 = 3 и **n_1** = –1 (не является натуральным числом).

Следовательно,

n_1 = 3, **n_2** = 3 + 1 = 4 и **n_3** = 3 + 2 = 5.

Числа {3, 4, 5} носят название «Пифагорова тройка» и являются самым простым решением уравнения (3).

2.

2.1. Допустим, удовлетворяющая условию тройка фуллеренов существует. Это значит, что уравнение

$$3n_1^2+\mathrm{n}_2^2=\mathrm{n}_3^2+\mathrm{n}_3 m_3+\mathrm{m}_3^2 \ (5)$$

имеет целочисленные решения (**n_3**, **m_3**). Докажем это.

Поскольку, по условию, **$n_1 \le n_2$**, то выразим второй параметр через первый как

$n_2 = n_1 + a$,

и подставим это в уравнение (5):

$$3n_1^2 + (n_1+\mathrm{a})^2=\mathrm{n}_3^2+\mathrm{n}_3 m_3+\mathrm{m}_3^2$$

Преобразуем:

$$3n_1^2+\mathrm{n}_1^2 + 2\mathrm{an}_1+\mathrm{a}^2=\mathrm{n}_3^2+\mathrm{n}_3 m_3+\mathrm{m}_3^2$$
$$4n_1^2 + 2\mathrm{an}_1+\mathrm{a}^2=\mathrm{n}_3^2+\mathrm{n}_3 m_3+\mathrm{m}_3^2$$
$$(2n_1)^2 + (2n_1)\mathrm{a}+\mathrm{a}^2=\mathrm{n}_3^2+\mathrm{n}_3 m_3+\mathrm{m}_3^2 \ (6)$$

Поскольку **$n \ge m$**, то из (6) следует, что

n_3 = 2**n_1** и **m_3** = **a** = **$n_2 - n_1$**.

То есть, для любой матрешки {(**n_1**, **n_1**), (**n_2**, 0)}, где **$n_1 \le n_2$**, существует фуллерен (2**n_1**, **$n_2 - n_1$**), изомерный этой матрешке, что и требовалось доказать.

2.2. а) Поскольку изомерный матрешке {(**n_1**, **n_1**), (**n_2**, 0)} фуллерен относится к I типу, то для него

m_3 = 0,

а, следовательно, **$n_2 - n_1$** = 0,

то есть, **$n_2 = n_1$**.

Таким образом, матрешке {(**n_1**, **n_1**), (**n_1**, 0)} изомерен фуллерен I типа (2**n_1**, 0).

б) Поскольку изомерный матрешке {(**n_1**, **n_1**), (**n_2**, 0)} фуллерен относится ко II типу, то для него

$n_3 = m_3$,

а, значит, 2**n_1** = **$n_2 - n_1$**,

и, следовательно, **n_2** = 3**n_1**.

Таким образом, матрешке {(**n_1**, **n_1**), (3**n_1**, 0)} изомерен фуллерен II типа (2**n_1**, 2**n_1**).

3.

3.1. Запишем равенство, следующее из изомерии тройной матрешки и фуллерена:

$$20(n_1^2+\mathrm{n}_1 m_1+\mathrm{m}_1^2) + 20(n_2^2+\mathrm{n}_2 m_2+\mathrm{m}_2^2) + 20(n_3^2+\mathrm{n}_3 m_3+\mathrm{m}_3^2) = 20(n_4^2+\mathrm{n}_4 m_4+\mathrm{m}_4^2) \ (7)$$

Поскольку все четыре фуллерена относятся к I типу, полученное уравнение упрощается до:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = n_4^2. \quad (8)$$

Обозначим $\mathbf{n_1} = \mathbf{n}$ и $\mathbf{n_2} - \mathbf{n_1} = \mathbf{n_4} - \mathbf{n_3} = \mathbf{a}$ и, учитывая условие, $\mathbf{n_3} = 3\mathbf{n_1}$, подставим в уравнение (8) выражения для $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, $\mathbf{n_3}$ и $\mathbf{n_4}$:

$$\mathbf{n}^2 + (\mathbf{n} + \mathbf{a})^2 + (3\mathbf{n})^2 = (3\mathbf{n} + \mathbf{a})^2$$

$$\mathbf{n}^2 + \mathbf{n}^2 + 2\mathbf{na} + \mathbf{a}^2 + 9\mathbf{n}^2 = 9\mathbf{n}^2 + 6\mathbf{an} + \mathbf{a}^2$$
$$2\mathbf{n}^2 + 2\mathbf{na} - 6\mathbf{an} = 0$$
$$\mathbf{n}^2 - 2\mathbf{an} = 0$$
$$(\mathbf{n} - 2\mathbf{a})\mathbf{n} = 0$$
$$\mathbf{n} = 2\mathbf{a}$$

Наименьшие значения $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, $\mathbf{n_3}$ и $\mathbf{n_4}$, удовлетворяющие описанным условиям, отвечают $\mathbf{a} = 1$:

$$\mathbf{n_1} = \mathbf{n} = 2\mathbf{a} = 2,$$
$$\mathbf{n_2} = \mathbf{n_1} + \mathbf{a} = 3,$$
$$\mathbf{n_3} = 3\mathbf{n_1} = 6,$$
$$\mathbf{n_4} = \mathbf{n_3} + \mathbf{a} = 7$$

(матрешка {(2, 0), (3, 0), (6, 0)} и фуллерен (7, 0)).

3.2. Число атомов в фуллерене $\mathbf{N}(7, 0) = 20 \cdot 7^2 = 980$.

Решение задачи 7. Поиск углеродных паркетов (20 баллов)

1. Угол в правильном $\mathbf{n}$-угольнике ($\mathbf{n} \geq 3$) составляет $180° \cdot (\mathbf{n} - 2)/\mathbf{n}$.

   Сумма углов всех многоугольников, сходящихся в вершине правильного паркета, равна

$$\sum 180° \cdot \mathbf{x_i}(\mathbf{n_i} - 2)/\mathbf{n_i}) = 360°,$$

где $\mathbf{i}$ – тип многоугольника,
$\mathbf{x}$ – число многоугольников одного типа,
$\mathbf{n}$ – число углов многоугольника этого типа.

2.
   1) Если все многоугольники однотипны, то

$$180° \cdot \mathbf{x}(\mathbf{n} - 2)/\mathbf{n} = 360°,$$
$$\mathbf{x}(\mathbf{n} - 2)/\mathbf{n} = 2,$$
$$\mathbf{n} = 2\mathbf{x}/(\mathbf{x} - 2),$$
$$\mathbf{x} = 3 \text{ и } \mathbf{n} = 6.$$

Таким образом, ТОЗ отвечает набор 6-6-6.

2) Если два многоугольника относятся к одному типу, а третий – к другому (то есть, ТОЗ формируют два типа многоугольников), то:

$$(\mathbf{n_1} - 2)/\mathbf{n_1} + 2(\mathbf{n_2} - 2)/\mathbf{n_2} = 2$$
$$2(\mathbf{n_2} - 2)/\mathbf{n_2} = 2 - (\mathbf{n_1} - 2)/\mathbf{n_1}$$
$$\mathbf{n_2} - 2 = \mathbf{n_2}(\mathbf{n_1} + 2)/(2\mathbf{n_1})$$
$$\mathbf{n_2} = 4\mathbf{n_1}/(\mathbf{n_1} - 2)$$

По очереди подставляя все возможные значения $\mathbf{n_1}$ в полученное уравнение, получаем следующие значения для $\mathbf{n_2}$:

$\mathbf{n_1}$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathbf{n_2}$	<u>12</u>	<u>8</u>	20/3	<u>6</u>	28/5	32/6	36/7	<u>5</u>	44/9

При $\mathbf{n_1} > 10$ все значения $\mathbf{n_2}$ – дробные.

То есть, получаем четыре набора, отвечающие ТОЗ:

<u>3-12-12</u>, <u>4-8-8</u>, ранее полученный <u>6-6-6</u> и <u>10-5-5</u>.

3. Пусть существует такой ТОЗ, в котором в одной вершине сходятся три разных многоугольника, один из которых имеет нечетное число ребер. Поместим этот многоугольник в центр и начнем по его периметру размещать поочередно оставшиеся два типа многоугольников. В итоге у нас окажутся рядом два многоугольника одного типа, что противоречит условию правильности ТОЗ − окружение всех вершин должно быть эквивалентно.

1) Если все три многоугольника относятся к разным типам, то:

$$(\mathbf{n_1} - 2)/\mathbf{n_1} + (\mathbf{n_2} - 2)/\mathbf{n_2} + (\mathbf{n_3} - 2)/\mathbf{n_3} = 2$$
$$1 - 2/\mathbf{n_1} + 1 - 2/\mathbf{n_2} + 1 - 2/\mathbf{n_3} = 2$$
$$1/\mathbf{n_1} + 1/\mathbf{n_2} + 1/\mathbf{n_3} = 1/2$$

Следовательно, мы можем произвести замену:

$$1/2(\mathbf{k_1}) + 1/(2\mathbf{k_2}) + 1/(2\mathbf{k_3}) = 1/2$$
$$1/\mathbf{k_1} + 1/\mathbf{k_2} + 1/\mathbf{k_3} = 1$$
Пусть $\mathbf{k_1} < \mathbf{k_2} < \mathbf{k_3}$, тогда
$$1/\mathbf{k_1} + 1/\mathbf{k_2} + 1/\mathbf{k_3} < 3/\mathbf{k_1}$$
$$1 < 3/\mathbf{k_1},\ \mathbf{k_1} < 3.$$

Поскольку наименьшим правильным многоугольником с четным числом ребер является квадрат, то $\mathbf{k_1} \geq 2$.

Следовательно, $\mathbf{k_1} = 2$ и $\mathbf{n_1} = 4$.

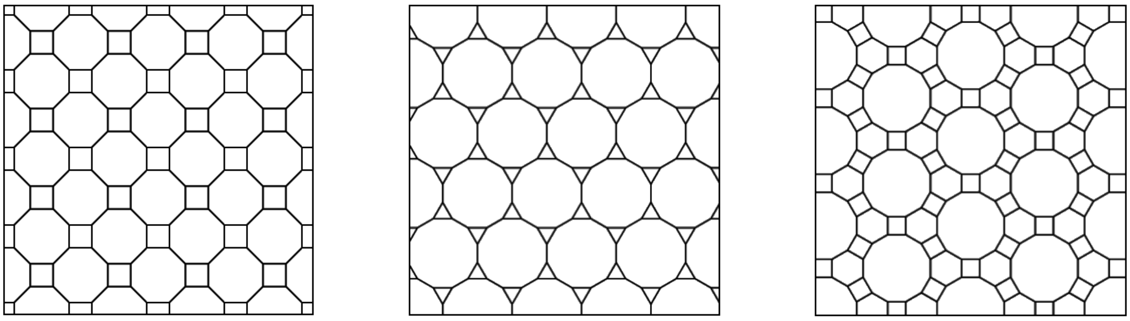
Тогда $1/\mathbf{k_2} + 1/\mathbf{k_3} = 1/2$
$$1/\mathbf{k_2} + 1/\mathbf{k_3} < 2/\mathbf{k_2}$$
$$1/2 < 2/\mathbf{k_2},\ \mathbf{k_2} < 4.$$

Поскольку $\mathbf{k_2} > \mathbf{k_1} = 2$ и $\mathbf{k_2} < 4$, то $\mathbf{k_2} = 3$ и $\mathbf{n_2} = 6$.

Тогда $1/\mathbf{k_3} = 1/6$, $\mathbf{k_3} = 6$ и $\mathbf{n_3} = 12$.

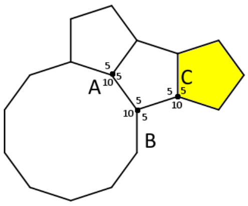
Таким образом, ТОЗ отвечает <u>набор 4-6-12</u>.

4. Набор 6-6-6 − в одной вершине сходятся три правильных шестиугольника (например, структура графена).



а *б* *в*

Здесь: а — набор <u>4-8-8</u> (октаграфен), б — набор <u>3-12-12</u>, в — набор <u>4-6-12</u>.



В свою очередь, набор <u>10-5-5</u> ТОЗ не образует. В этом можно убедиться (см. рис.), если «достроить» окружение первой вершины (**A**) еще одним пятиугольником (желтого цвета, как откружение вершины **C**). При такой «достройке» один из углов при вершине **B**, структурно должен принадлежать десятиугольнику, но, по принципу эквивалентности вершин, является углом правильного пятиугольника.

5. Поскольку угол 135° − это угол в правильном восьмиугольнике (180°·6/8), то данному условию отвечают наборы <u>6-6-6</u> и <u>4-8-8</u> (графен и октаграфен).

Решение задачи 8. Полые металлические дельтаэдры (20 баллов)

1. Общее число ребер в произвольном дПМК, имеющем **F** треугольных граней, составляет

$$\mathbf{E} = 3\cdot\mathbf{F}/2 = 1{,}5\mathbf{F}$$

(каждая грань имеет три ребра, каждое ребро принадлежит двум граням одновременно).

По теореме Эйлера:

$$\mathbf{V} - 1{,}5\mathbf{F} + \mathbf{F} = 2,$$

следовательно, общее число вершин в дПМК

$$\mathbf{V} = 0{,}5\mathbf{F} + 2.$$

2. Общее число атомов в дПМК равно:

- числу атомов на **F** треугольных гранях (по $\mathbf{n}(\mathbf{n}+1)/2$ на каждой)
- минус число «повторных» атомов в 1,5**F** ребрах (по **n** на каждое)
- плюс число атомов в 0,5**F** + 2 вершинах (не зависит от **n**).

То есть,

$$\mathbf{N}(\mathbf{n}) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{n}+1)/2 - 1{,}5\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} + 0{,}5\mathbf{F} + 2 = 0{,}5\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}^2 - \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} + 0{,}5\mathbf{F} + 2.$$

	Дельтаэдр	**F**	**V** = 0,5**F**+2	**E** = 1,5**F**	**N**(**n**) = 0,5**Fn**^{2}–**Fn**+0,5**F**+2	**N**(2)
1	икосаэдр	20	12	30	$10\mathbf{n}^2 - 20\mathbf{n} + 12$	12
2	скручено удлиненная квадратная бипирамида	16	10	24	$8\mathbf{n}^2 - 16\mathbf{n} + 10$	10
3	трижды наращённая треугольная призма	14	9	21	$7\mathbf{n}^2 - 14\mathbf{n} + 9$	9
4	плосконосый двуклиноид	12	8	18	$6\mathbf{n}^2 - 12\mathbf{n} + 8$	8
5	пятиугольная бипирамида	10	7	15	$5\mathbf{n}^2 - 10\mathbf{n} + 7$	7
6	октаэдр	8	6	12	$4\mathbf{n}^2 - 8\mathbf{n} + 6$	6
7	треугольная бипирамида	6	5	9	$3\mathbf{n}^2 - 6\mathbf{n} + 5$	5
8	тетраэдр	4	4	6	$2\mathbf{n}^2 - 4\mathbf{n} + 4$	4

Число атомов в дПМК, на ребро которого приходится два атома, равно числу вершин этого дПМК: $\mathbf{N}_i(2) = 0{,}5\mathbf{F} + 2 = \mathbf{V}_i$.

3. Подставим в условие $\mathbf{N}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_j(\mathbf{y})$ формулы для **N**(**n**) и упростим полученное выражение:

$$0{,}5\mathbf{F}_i\cdot\mathbf{x}^2 - \mathbf{F}_i\cdot\mathbf{x} + 0{,}5\mathbf{F}_i + 2 = 0{,}5\mathbf{F}_j\cdot\mathbf{y}^2 - \mathbf{F}_j\cdot\mathbf{y} + 0{,}5\mathbf{F}_j + 2$$
$$\mathbf{F}_i\cdot\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{F}_i\cdot\mathbf{x} + \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_j\cdot\mathbf{y}^2 - 2\mathbf{F}_j\cdot\mathbf{y} + \mathbf{F}_j$$
$$\mathbf{F}_i(\mathbf{x}-1)^2 = \mathbf{F}_j(\mathbf{y}-1)^2 \quad (1)$$

Условие $\mathbf{N}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_j(\mathbf{y})$ выполняется в целых числах тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{F_i/F_j} \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что, так как $\mathbf{x} < \mathbf{y}$, то $\mathbf{F}_i > \mathbf{F}_j$.

Запишем все возможные варианты значения соотношения $\mathbf{F}_i/\mathbf{F}_j$:

i/j	2	3	4	5	6	7	8
1	20/16 = 1,25	20/14 ≈ 1,4	20/12 ≈ 1,7	20/10 = 2	20/8 = 2,5	20/6 ≈ 3,3	20/4 = 5
2		16/14 ≈ 1,1	16/12 ≈ 1,3	16/10 = 1,6	16/8 = 2	16/6 ≈ 2,7	**16/4 = 2^2**
3			14/12 ≈ 1,2	14/10 = 1,4	14/8 = 1,75	14/6 ≈ 2,3	14/4 = 3,5
4				12/10 = 1,2	12/8 = 1,5	12/6 = 2	12/4 = 3
5					10/8 = 1,25	10/6 ≈ 1,7	10/4 = 2,5
6						8/6 ≈ 1,3	8/4 = 2
7							6/4 = 1,5

То есть, полученному условию удовлетворяет всего одна пара типов: (**i** = 2) скручено удлиненная квадратная бипирамида и (**j** = 8) тетраэдр.

Чтобы найти **y**(**x**), подставим значения $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_8$ в полученное ранее уравнение (1):

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x}-1)^2 = \mathbf{F}_8(\mathbf{y}-1)^2$$
$$16(\mathbf{x}-1)^2 = 4(\mathbf{y}-1)^2$$
$$4(\mathbf{x}-1)^2 = (\mathbf{y}-1)^2$$
$$2\mathbf{x}-2 = \mathbf{y}-1$$
$$\mathbf{y} = 2\mathbf{x}-1$$

4. Так как **x** < **y**, а самым маленьким является дельтаэдр, на ребро которого приходится 2 атома металла, то самая маленькая пара изомеров это:

   - скручено удлиненная четырехугольная (квадратная) бипирамида, на ребро которой приходится 2 атома металла ($\mathbf{N}_2(2) = 10$),
   - и тетраэдр, на ребро которого приходится **y** = 2·2 – 1 = 3 атома.