



**NANNOΣ 10**

# **Сборник задач**

X Всероссийской олимпиады школьников

«Нанотехнологии - прорыв в будущее»

## Оглавление

Заключительный (очный) тур.....	6
Математика (Вариант 2).....	6
Простые задачи.....	6
1. Наноткач.....	6
2. Вольвокс как кластер.....	6
3. Наноконтейнер для лекарства.....	8
4. Спирали фуллеренов.....	9
5. Переходник графен-трубка. Часть 2: индексы хиральности трубки.....	9
Более сложные задачи.....	11
6. Золотые кластеры.....	11
7. Чехарда и фуллерены.....	14
8. Биоинформатика, часть 2: Архиватор для хомячка.....	17
Биология (Вариант 1).....	21
Простые задачи.....	21
Задача 1.....	21
Задача 2.....	21
Задача 3.....	22
Задача 4.....	23
Задача 5.....	24
Более сложные задачи.....	26
Задача 6.....	26
Задача 7.....	27
Задача 8.....	29
Физика (Вариант 1).....	31
Простые задачи.....	31
Задача 1.....	31
Задача 2.....	31
Задача 3.....	33
Задача 4.....	34
Задача 5.....	35
Более сложные задачи.....	36
Задача 6.....	36
Задача 7.....	38
Задача 8.....	40
Химия (Вариант 3).....	42

Простые задачи.....	42
Задача 1 .....	42
Задача 2 .....	42
Задача 3 .....	42
Задача 4 .....	42
Задача 5 .....	43
Более сложные задачи.....	43
Задача 6. Розовое стекло.....	43
Задача 7. Розовое стекло.....	44
Задача 8. Нанобиохимия ДНК.....	46
Отборочный (заочный) тур.....	49
Юный эрудит .....	49
Задача 1. Как Энрико Ферми... ..	49
Задача 2. Уникальный материал.....	50
Задача 3. Нанотехнологии в спорте .....	50
Задача 4. Бумага-суперконденсатор .....	51
Задача 5. Плавающие золотые нанокубики.....	51
Задача 6. Наногубка.....	52
Задача 7. Гипертермия.....	53
Задача 8. МЭМС шестерни.....	53
Задача 9. От ботаники до нанотехнологий.....	54
Задача 10. Искусственные цветы .....	55
Задача 11. Загадка гнома .....	56
Задача 12. Подготовка к эксперименту .....	57
Задача 13. Растягиваем белок .....	60
Задача 14. Нанокроссворд биолого-химический.....	61
Задача 15. Нанокроссворд с картинками.....	63
Задача 16. Передвижение бактерий.....	65
Задача 17. Филворд .....	68
Физика.....	70
Задача 1. Давление света на наночастицу.....	70
Задача 2. Дифракция рентгеновских лучей на многослойной пленке .....	70
Задача 3. Нанорельеф .....	71
Задача 4. Оптоакустическая спектроскопия.....	73
Задача 5. Потенциал взаимодействия .....	75
Задача 6. Нанорубины .....	77

Задача 7. Тепловое расширение.....	78
Задача 8. Лазерное антистоксовое охлаждение.....	79
Задача 9. Некомпенсированная сила.....	80
Задача 10. Нанолампы накаливания.....	84
Биология.....	90
Задача 1. Как стать меньше?.....	90
Задача 2. Что эффективнее?.....	91
Задача 3. Нанотехнологии и зрение.....	92
Задача 4. «Кровавые» эксперименты Хагрида.....	93
Задача 5. Как вырастить красивые цветы?.....	94
Задача 6. Мембранный транспорт.....	96
Задача 7. Каналы-рецепторы.....	99
Задача 8. Укладываем ДНК в наноканавки.....	100
Задача 9. Зелёные и не совсем зелёные флуоресцентные белки.....	101
Задача 10. СОЭ.....	104
Химия.....	108
Задача 1. Химическое эмодзи.....	108
Задача 2. Синтез неорганических наночастиц.....	109
Задача 3. Наночастицы в материале.....	110
Задача 4. Наноалмазы.....	111
Задача 5. Нанокатализ.....	113
Задача 6. Молекулярные моторы.....	115
Задача 7. Железный шар.....	118
Задача 8. Концентрированные белки.....	119
Задача 9. Фотосинтез полупроводника.....	122
Задача 10. Пористый изолятор.....	123
Математика.....	126
Задача 1. Знакомство с боросференом B40.....	126
Задача 2. Магия треугольников.....	129
Задача 3. Нанопереходник графен-нанотрубка.....	132
Задача 4. Новый катализатор.....	135
Задача 5. Формулы интеркалятов.....	136
Задача 6. Сбитая шкала.....	140
Задача 7. «Полусфера» – младший родственник купола Фуллера.....	141
Задача 8. Число изомеров фуллерена C <sub>2016</sub> .....	143
Задача 9. БиоИнформатика и E. Coli.....	146

Задача 10. Вложения многогранников.....151

# Заключительный (очный) тур

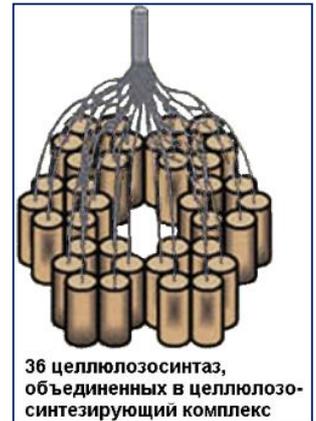
## Математика

### Простые задачи

#### 1. Наноткач

(8 баллов)

Фермент целлюлозосинтаза производит одиночную целлюлозную нить, составленную из отдельных сахаридов. Ферментный комплекс (см. рисунок) путешествует по поверхности клетки, наматывая на нее производимую микрофибриллу целлюлозы как нитку на клубок. За какое время такой наноткач сделает целлюлозную оболочку массой  $M = 4.5 \cdot 10^{-5}$  нг вокруг клетки радиусом  $R = 8$  мкм, если за одну секунду в микрофибриллу включается 500 сахаридов? (2.5 балла) Сколько оборотов вокруг клетки  $k$  он при этом совершит? (5.5 балла) Считать, что масса одного сахараида равна  $m = 2.7 \cdot 10^{-13}$  нг, длина  $l = 0.5$  нм, толщиной микрофибриллы пренебречь.



**Ответ:**

1) (2.5 балла) Чтобы получить оболочку массой  $M$ , всего необходимо синтезировать

$$N = \frac{M}{m} = \frac{M}{2.7 \cdot 10^{-13}} \text{ сахаридов.}$$

$$\text{На это понадобится } t = \frac{N}{v} = \frac{N}{500} = \frac{M}{500 \cdot 2.7 \cdot 10^{-13}} = \frac{M}{1.35 \cdot 10^{-10}} \text{ с.}$$

2) (5.5 балла) Длина полученной микрофибриллы из 36 целлюлозных цепочек (число цепочек в микрофибрилле было дано на рисунке в условии задачи) при этом составит

$$L = \frac{N \cdot 0.5}{36} = \frac{0.5M}{36 \cdot 2.7 \cdot 10^{-13}} = \frac{M}{1.944 \cdot 10^{-11}} \text{ нм.}$$

Тогда число оборотов ферментного комплекса вокруг клетки равно

$$k = \frac{L}{2\pi R_{(\text{мкм})}} = \frac{M}{2\pi R_{(\text{нм})} \cdot 10^3 \cdot 1.944 \cdot 10^{-11}} = \frac{M}{R_{(\text{нм})} \cdot 1.2 \cdot 10^{-7}}.$$

Вариант	R, мкм	M, нг	N	t, с	L, нм	k
2	8	$4.5 \cdot 10^{-5}$	$1.67 \cdot 10^8$	$3.33 \cdot 10^5$	$2.3 \cdot 10^6$	46,67 (46 полных оборотов)

#### 2. Вольвокс как кластер

(8 баллов)

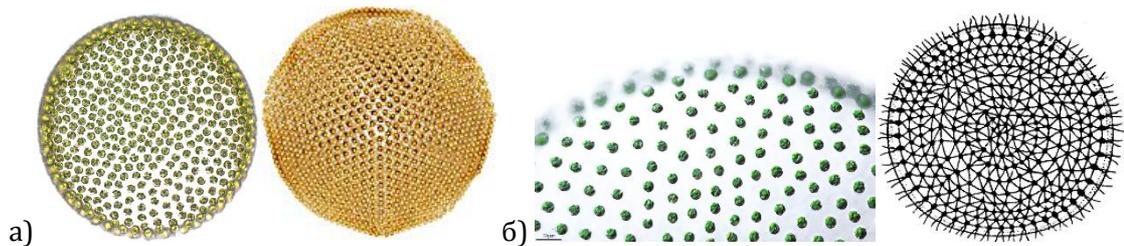


Рис. а) Микрофотография вольвокса и модель поверхности нанокластера золота; б) поверхность вольвокса и ее модель.

Вольвокс представляет собой колонию одноклеточных зеленых водорослей, сгруппированных в сферу. В некотором вольвоксе каждая из клеток связана мостиком с ближайшими соседями ( $x$  клеток имеют 5 соседей,  $y - 6$ ,  $z - 7$ ). При этом формируется сеть из треугольных ячеек, покрывающая всю сферу. Найдите общее число клеток в вольвоксе  $v$ , а также  $x$  и  $z$ , если общее число мостиков  $e = 3660$ , а число клеток с шестью соседями  $y = 1050$ .

**Ответ:**

Вольвокс можно рассматривать как многогранник, имеющий  $v = x + y + z$  (1) вершин,  $e$  ребер и  $f$  треугольных граней. Тогда запишем для него теорему Эйлера:

$$x + y + z - e + f = 2. \quad (2)$$

В тоже время, исходя из свойств многогранников, мы можем записать, что:

$$e = \frac{5x}{2} + \frac{6y}{2} + \frac{7z}{2} \quad (\text{каждое ребро принадлежит двум вершинам}) \quad (3)$$

$$\text{и } f = \frac{5x}{3} + \frac{6y}{3} + \frac{7z}{3} \quad (\text{каждая грань имеет три вершины}) \quad (4)$$

Тогда, объединяя (2), (3) и (4), получаем:

$$x + y + z - \frac{5x}{2} - \frac{6y}{2} - \frac{7z}{2} + \frac{5x}{3} + \frac{6y}{3} + \frac{7z}{3} = 2. \quad (5)$$

$$\text{Упрощая (5), приходим к } x = 12 + z. \quad (6)$$

Теперь подставим (6) в выражение (3):

$$e = \frac{5(12 + z)}{2} + \frac{6y}{2} + \frac{7z}{2} \quad (7)$$

$$2e = 60 + 5z + 6y + 7z \quad (8)$$

$$\text{Подставляя (6) в (8), получаем } z = \frac{2e - 6y - 60}{12} = \frac{e - 3y - 30}{6} \quad (9), \quad x = 12 + z = 7 + \frac{e - 3y}{6} \quad (10) \text{ и}$$

$$\text{общее число клеток в колонии } v = x + y + z = 7 + \frac{e - 3y - 30}{6} + y + \frac{e - 3y - 30}{6} = 2 + \frac{e}{3} \quad (11).$$

Вариант	<b>е</b>	<b>у</b>	<b>х</b>	<b>z</b>	<b>v</b>
2	3660	1050	<u>92</u>	<u>80</u>	<u>1222</u>

**Примечание:** приведен один из возможных вариантов решения.

Общий подход заключается в записи системы из трех уравнений ((2)-(4) или их линейных комбинаций) с тремя неизвестными и ее решении.

### 3. Наноконтейнер для лекарства

(8 баллов)

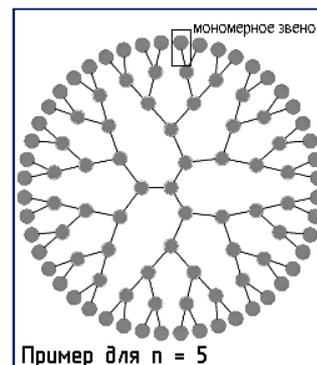
Молекулы дендримера – разветвленного на манер дерева полимера – имеют внутри достаточно свободного места, чтобы там, как в контейнере, поместились молекулы лекарства. Рассчитайте, во сколько раз масса переносимого лекарства может быть больше массы самого дендримера. Считать, что:

– дендример насчитывает  $n = 12$  поколений ветвления, схема ветвления представлена на рисунке;

– радиус дендримера с каждым поколением увеличивается на 1 нм;

– масса одного мономерного звена  $2 \cdot 10^{-22}$  г;

– плотность звеньев дендримера, молекул лекарства, а также наноконтейнера, полностью заполненного лекарством, равна  $1 \text{ г/см}^3$ .



**Ответ:**

1) Если лекарство занимает весь свободный объем в молекуле дендримера, значит, масса заполненного контейнера составляет

$$m_1 = V\rho = \frac{4}{3}\pi(1 \cdot n)^3 \cdot 1 \cdot 10^{-21} = \frac{4}{3}\pi n^3 \cdot 10^{-21} \approx 4,13n^3 \cdot 10^{-21} \text{ г}$$

2) В свою очередь, масса «вещества» дендримера равна

$$m_2 = b \cdot 10^{-22} \cdot S + m_3 \approx b \cdot 10^{-22} \cdot (S + 1) \approx b \cdot 10^{-22} \cdot 3 \cdot 2^n \text{ г, где } b \text{ – масса одного мономерного звена } \times 10^{22}, S = 3 + 6 + \dots + 3 \cdot 2^{n-1} = 3 \sum_{k=1}^n 2^{k-1} = 3(2^n - 1) \approx 3 \cdot 2^n \text{ – общее число мономеров в}$$

структуре дендримера (сумма геометрической прогрессии), а  $m_3$  – масса центральной группы дендримера (ею можно пренебречь по сравнению с массой всего дендримера).

3) Тогда на один грамм дендримера приходится

$$\frac{m_1 - m_2}{m_2} = \frac{m_1}{m_2} - 1 = \frac{4,13n^3 \cdot 10^{-21}}{b \cdot 10^{-22} \cdot 3 \cdot 2^n} - 1 = \frac{41,3n^3}{b \cdot 3 \cdot 2^n} - 1 = m \text{ г белка}$$

Вариант	<b>b</b>	<b>n</b>	<b>m<sub>1</sub></b>	<b>S</b>	<b>m<sub>2</sub></b>	<b>m</b> белка, г
---------	----------	----------	----------------------	----------	----------------------	-------------------

2	2	12	$7,1 \cdot 10^{-18}$	12288	$2,5 \cdot 10^{-18}$	1,8 (1,9 по общей ф-ле)
---	---	----	----------------------	-------	----------------------	-------------------------

#### 4. Спирали фуллеренов

(8 баллов)

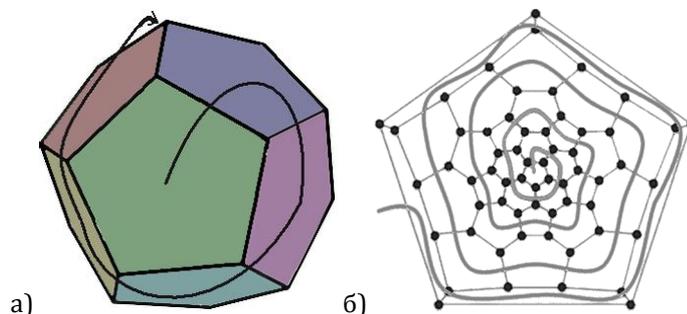


Рис.1. Примеры спиралей на поверхности фуллеренов.

Все грани некоторого заданного фуллерена  $C_{32}$  раскрашены в разные цвета. На его поверхности можно нарисовать спираль в любом направлении из любой грани так, что она последовательно пройдет по всем его граням.

1. Какое минимальное число цветных граней в начале спирали необходимо указать, чтобы однозначно ее задать? **(2.5 балла)**
2. Найдите, сколько разных спиралей, различающихся последовательностью цветов, можно построить для этого фуллерена. **(5.5 баллов)**

**Ответ:**

1. **(2.5 балла)** Когда спираль стартует с какого-либо пятиугольника, то существует 5 (по числу соседей) вариантов выбрать второй многоугольник. На следующем шаге, от второго многоугольника, можно пойти далее либо по часовой, либо против часовой стрелки. Дальше спираль можно продолжить только одним единственным способом, т.е., спираль уже задана (*т.о., задается первыми 3-мя гранями*).

2. **(5.5 баллов)** Число «начал» спиралей, стартующих из любого пятиугольника, будет (см. ответ 1)  $5 \cdot 2 = 10$ . Согласно указаниям во вспомогательной информации к очному туру, фуллерен  $C_n$  содержит 12 пятиугольников, тогда общее число спиралей, стартующих с них, равно  $10 \cdot 12 = 120$ . Рассуждая аналогично, для шестиугольников получаем  $6 \cdot 2 \cdot \Gamma_6 = 12 \cdot (n-20)/2 = 6 \cdot (n-20)$ . [ $C_{32} \Gamma_6 = 6$ ,  $C_{40} \Gamma_6 = 10$ ] Тогда общее число спиралей для произвольного фуллерена  $C_n$  будет равно:  $120 + 6 \cdot (n-20) = 6n$ .

Для фуллерена  $C_{32}$  получаем **192** спиралей. Для фуллерена  $C_{40}$  получаем **240** спиралей.

#### 5. Переходник графен-трубка. Часть 2: индексы хиральности трубки

(8 баллов)

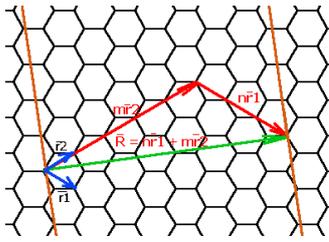


Рис. 1. Для получения нанотрубки  $(n, m)$ , графитовую плоскость надо разрезать по пунктирным линиям и свернуть вдоль направления вектора  $\vec{R} = n\vec{a}_1 + m\vec{a}_2$ . В этом примере  $n = 3$   $m = 5$ .

Различают следующие типы нанотрубок:

- «зубчатые»,  $n = m$
- зигзагообразные,  $m = 0$  или  $n = 0$
- спиральные или хиральные нанотрубки (все остальные значения  $n$  и  $m$ )

На заочном туре многие из вас познакомились с нанопереходником графен-трубка, который получается, если в разрезе на листе графена добавить 6 графеновых треугольников (см. рисунок 2 а,б).

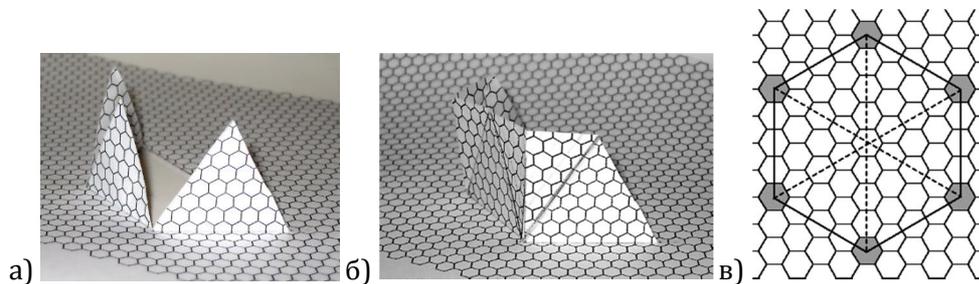


Рис.2. а,б) Промежуточные этапы построения нанопереходника графен-трубка (пример); в) расположение разрезов и семиугольников на листе графена для некоторого переходника.

Для нанотрубки, получающейся из продолжения переходника, схема которого представлена на рис. 2в, определите:

- 1) ее тип;
- 2) индексы хиральности  $(n, m)$ ;
- 3) диаметр (считать, что трубка имеет форму цилиндра, длина С-С связи равна 0.14 нм).

**Ответ:**

1) Сворачивание нанотрубки происходит вдоль вектора  $\mathbf{R}$  (рис. 1), поэтому периметр очерченного на рис. 2в шестиугольника равен длине вектора  $\mathbf{R}$ . Сравнивая рисунки, очевидно, что периметр этого шестиугольника проходит параллельно единичному вектору (т.е. один из индексов хиральности трубки равен 0), трубка – **зигзагообразная  $(n, 0)$** .

2) Теперь необходимо найти, сколько единичных векторов содержит вектор  $\mathbf{R}$ . Расстояние между центрами шестиугольников равно длине единичных векторов. Значит, необходимо сосчитать по рисунку 2в число расстояний между центрами шестиугольников, укладывающихся в периметр обведенного шестиугольника. Между двумя соседними вершинами обведенного шестиугольника их укладывается (в вариантах 2 и 4, соответственно) 4 и 6, т.е. это нанотрубки  $(24, 0)$  и  $(36, 0)$ .

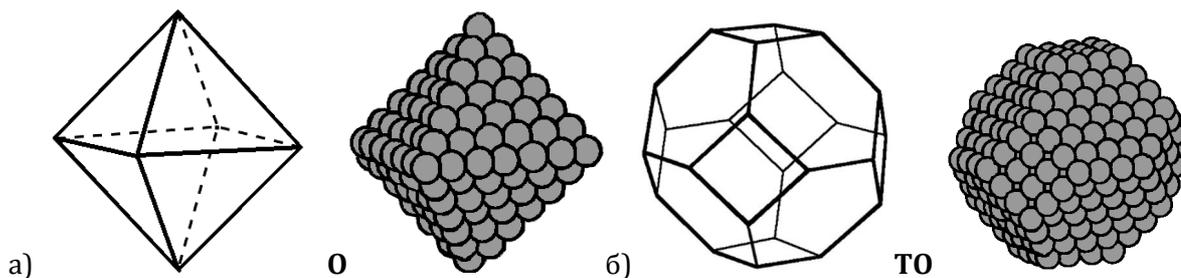
3) Обозначив длину связи С-С как  $\mathbf{a}$ , находим длину единичного радиус вектора –  $\mathbf{a}\sqrt{3}$  (как длину малой диагонали углеродного шестиугольника). Зная периметр цилиндрического

сечения углеродной трубки несложно найти ее диаметр:  $D = \frac{a\sqrt{3}}{\pi} n = 0,077n$ . Для вариантов 2 и 4 находим  $D = 1,9$  и  $2,8$  нм.

## Более сложные задачи

### 6. Золотые кластеры

(20 баллов)



Атомы золота могут образовывать кластеры в форме а) октаэдра  $O$  с ребром  $n$  атомов и общим числом атомов  $O(n)$ ; б) правильного усеченного октаэдра  $TO$  с ребром  $m$  атомов и общим числом атомов  $TO(m)$ .

На рисунке приведены примеры для  $n = 7$  и  $m = 4$ .

1. Слои в форме какого многоугольника при сложении стопкой формируют кластер  $O$ ? (0.5 балла) Сколько и каких фигур мы должны «отсечь» от исходного октаэдра, чтобы получить  $TO$ ? Выразите через  $m$  число атомов на их ребрах. (2.5 балла)

2. Выведите формулы  $O(n)$  (2 балла) и  $TO(m)$  (4 балла).

3. Оцените размеры кластера  $TO$  с ребром  $m = 5$  и кластера  $O$ , усечением которого он получен, как радиусы описанных вокруг них сфер. (5 баллов). Радиус атома золота считать равным 0.14 нм.

4. При равном объеме более предпочтительной является форма кластера, имеющая меньшую площадь поверхности. Для октаэдра и правильного усеченного октаэдра равных объемов найдите соотношение площадей поверхностей и сделайте вывод, какая форма кластера будет более предпочтительной. (6 баллов)

**Ответ:**

1. Слои в форме какого многоугольника при сложении стопкой формируют кластер  $O$ ? (0.5 балла) Сколько и каких фигур мы должны «отсечь» от исходного октаэдра, чтобы получить  $TO$ ? Выразите через  $m$  число атомов на их ребрах. (2.5 балла)

2. Выведите формулы  $O(n)$  (2 балла) и  $TO(m)$  (4 балла).

1) Октаэдрический кластер представляет собой стопку квадратов из атомов золота, ребро которых сначала растет от 1 до  $n$ , а затем снова уменьшается до 1.

$$O(n) = \sum_1^n k^2 + \sum_1^{n-1} k^2 = 2 \sum_1^n k^2 - n^2 = 2 \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - n^2 = \frac{2n^3 + n}{3}$$

2) На каждой из шести квадратных граней **ТО** можно «достроить» правильные квадратные пирамиды из атомов золота, на ребро которых приходится **m - 1** атом (на один меньше, чем ребро **ТО**). При этом **ТО** будет дополнен до «исходного» неусеченного октаэдра, на ребро которого придется **n = m + 2(m - 1) = 3m - 2** атома (ребро **ТО** плюс удвоенное ребро «отсеченного» кластера в виде четырехугольной пирамиды). Таким образом, общее количество атомов в **ТО** будет равно разности числа атомов в «исходном» октаэдре и суммарного числа атомов золота в шести «отсеченных» пирамидах:

$$TO(m) = O(3m - 2) - 6P(m - 1)$$

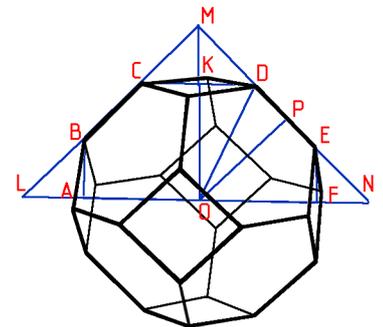
где  $P(m) = \sum_1^m k^2 = \frac{2m^3 + 3m^2 + m}{6}$  - число атомов в одной квадратной пирамиде.

$$TO(m) = \frac{2(3m - 2)^3 - (3m - 2)}{3} - 6 \frac{2(m - 1)^3 + 3(m - 1)^2 + (m - 1)}{6}$$

Упрощая до многочлена, получаем:  $TO(m) = 16m^3 - 33m^2 + 24m - 6$

3. Оцените размеры кластера **ТО** с ребром **m = 5** и кластера **O**, усечением которого он получен, как радиусы описанных вокруг них сфер. (5 баллов). Радиус атома золота считать равным 0.14 нм.

1) Рассмотрим фигуру **ABCDEF** (рис.). Здесь **BC = DE = a** - ребро правильного усеченного октаэдра, **AB = CK = KD = EF =  $\frac{\sqrt{2}}{2}a$**  - половина диагонали квадратной грани правильного усеченного октаэдра.



2) Чтобы рассчитать радиус сферы, описанной около усеченного октаэдра, **OD**, нам необходимо найти длину отрезка **КО**, являющегося высотой рассматриваемой фигуры **ABCDEF**.

3) Треугольники **CMD** и **LMN** подобны по первому признаку подобия ( $\angle LMN = \angle CMD$ ,  $\angle MLN = \angle MCD$  как соответственные при параллельных прямых **CD** и **LN**). При этом **MD = DE = EN = a = 1/3 MN = 1/3 LA**. Следовательно, **MK = 1/3 MO**, и **КО = 2/3 MO**.

4)  $MO = \frac{\sqrt{2}}{2} MN = \frac{\sqrt{2}}{2} A$  (как катет равнобедренного прямоугольного треугольника **MON**, отвечает радиусу сферы, описанной около октаэдра).

Тогда  $КО = 2/3 MO = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} MN = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 3a = a\sqrt{2}$ .

5)  $OD = \sqrt{KD^2 + КО^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{\frac{2}{4} + 2} = a\sqrt{\frac{5}{2}}$ .

6) Для кластера **ТО**:  $a = 2r(m-1)$  и  $R_{ТО} = 2r(m-1)\sqrt{\frac{5}{2}} + r$  (рассматриваем радиус сферы, проходящей через центры атомов, лежащих в вершинах кластера, и прибавляем поправку на радиус самого атома).

$$m = 5 \text{ и } r = 0,14 \text{ нм: } R_{ТО} = 2 \cdot 0,14(5-1)\sqrt{\frac{5}{2}} + 0,14 = 1,9 \text{ нм.}$$

7) Для кластера **О**:  $A = 2r(n-1)$  и  $R_O = \sqrt{2}r(n-1) + r$  (рассматриваем радиус сферы, проходящей через центры атомов, лежащих в вершинах кластера, и прибавляем поправку на радиус самого атома).

$$n = 3m - 2 = 15 - 2 = 13 \text{ и } r = 0,14 \text{ нм: } R_O = \sqrt{2} \cdot 0,14(13-1) + 0,14 = 2,5 \text{ нм}$$

**Примечание:** Второй вариант расчета радиуса описанной сферы для усеченного октаэдра:

$$OD = \sqrt{OP^2 + PD^2} = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(3a)^2 + a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{10}$$

$$R_{ТО} = r(m-1)\sqrt{10} + r = 0,14(5-1)\sqrt{10} + 0,14 = 1,9 \text{ нм}$$

$$\text{или } OD = \frac{1}{2}\sqrt{(2r(n-1))^2 + (2r(m-1))^2} = r\sqrt{(n-1)^2 + (m-1)^2} \text{ и } R_{ТО} = 0,14(\sqrt{144+16} + 1) \approx 1,9 \text{ нм}$$

**4. При равном объеме более предпочтительной является форма кластера, имеющая меньшую площадь поверхности. Для октаэдра и правильного усеченного октаэдра равных объемов найдите соотношение площадей поверхностей и сделайте вывод, какая форма кластера будет более предпочтительной. (6 баллов)**

1) Объем кластера **О** равен  $V_O = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot A^2 \cdot A \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} A^3$

2) Объем кластера **ТО** равен  $V_{ТО} = \frac{\sqrt{2}}{3}(3a)^3 - 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} a^3 = 8\sqrt{2}a^3$

3) При равенстве объемов  $(\frac{\sqrt{2}}{3} A^3 = 8\sqrt{2}a^3)$  ребра кластеров соотносятся как  $A = 2^3\sqrt{3}a$ .

4) Площадь поверхности кластера **О** равна  $S_O = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} A^2 = 2\sqrt{3}A^2$

5) Площадь поверхности кластера **ТО** равна  $S_{ТО} = 6a^2 + 8 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 6a^2(1 + 2\sqrt{3})$

6) Тогда  $\frac{S_{ТО}}{S_O} = \frac{6a^2(1 + 2\sqrt{3})}{2\sqrt{3}A^2} = \frac{3a^2(1 + 2\sqrt{3})}{\sqrt{3}(2^3\sqrt{3}a)^2} = \frac{3(1 + 2\sqrt{3})}{4\sqrt{3}(\sqrt{3})^2} = 0,93$  (0,99 если брать округленные значения корней)

То есть, более предпочтительной является форма правильного усеченного октаэдра.

## 7. Чехарда и фуллерены

(20 баллов)

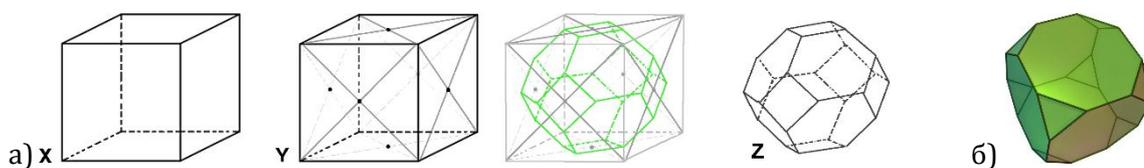


Рис.1 а) Пример применения операции чехарды к кубу; б) усеченный куб

Простая операция чехарды позволяет «перепрыгнуть» от многогранника **X** к многограннику **Z** (рис. 1а). Для этого в центры граней **X** необходимо поставить точки и соединить их с близлежащими вершинами: получится промежуточный многогранник **Y**, соединив центры граней которого получим **Z**.

1. Из какого многогранника **X** в результате «чехарды» получается усеченный куб (рис. 1б)? (2.5 балла)

Операция чехарды часто используется при моделировании фуллеренов, поскольку для любого исходного фуллерена  $C_x$  она позволяет построить новый фуллерен –  $C_z$ .

2. Опишите (проиллюстрировав рисунками), какие структурные элементы  $C_z$  образуются внутри пяти- и шестиугольников исходного фуллерена  $C_x$ , а также на его связях и вокруг его вершин. (3 балла)

3. Выразите число вершин нового фуллерена **z** через число вершин исходного **x**. (4 балла)

4. Чему равно минимально возможное значение **z** при чехарде фуллеренов? (2.5 балла) Может ли при этом исходный фуллерен  $C_x$  быть получен в результате чехарды из некоторого другого многогранника? Поясните. (3 балла)

5. Какая главная структурная особенность расположения пятиугольников существует для всех полученных чехардой фуллеренов? (2 балла) На рисунке 2 найдите структурный изомер  $C_{72}$ , который получается операцией чехарды. Ответ обоснуйте. (3 балла)

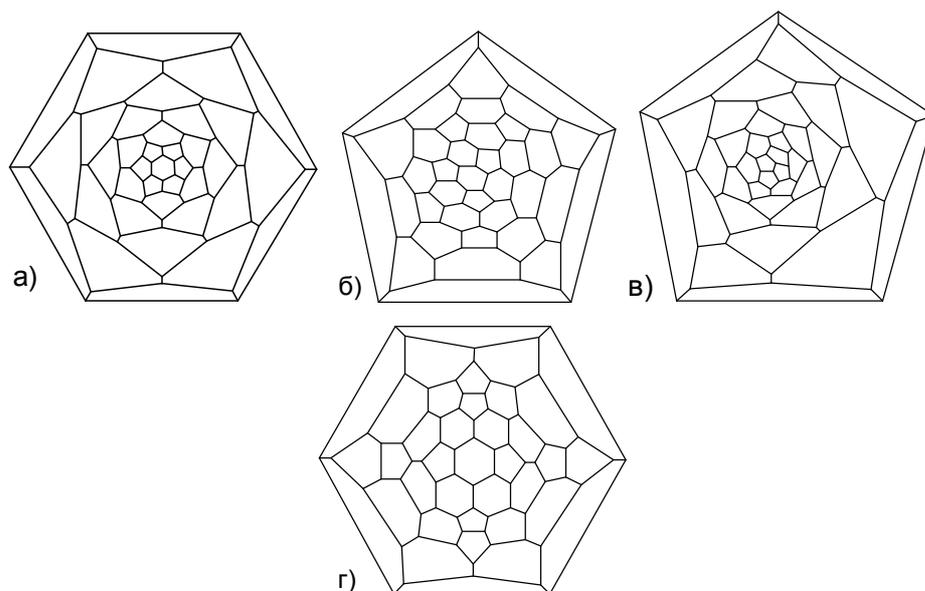
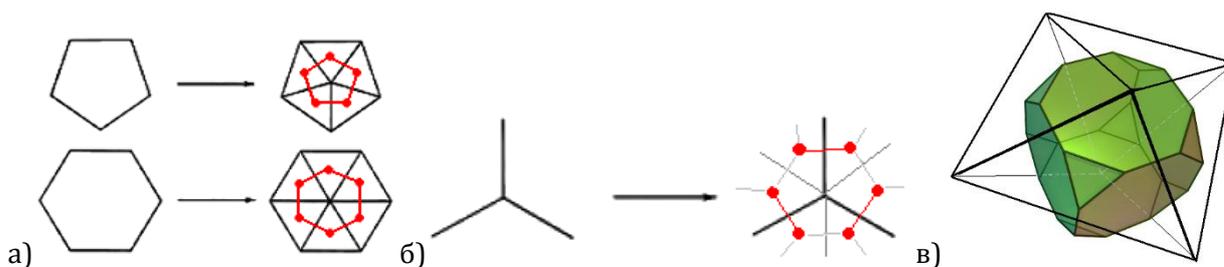


Рис. 2 Диаграммы Шлегеля для разных структурных изомеров фуллерена  $C_{72}$ .

**Решение:**



Внимательно рассматривая рисунки, можно заметить закономерности чехарды:

- внутри  $n$ -угольной грани исходного многогранника  $X$  получается  $n$ -угольник конечного многогранника  $Z$ , повернутый относительно исходного (рис. а);
- при этом в  $Z$  появляется еще один тип многоугольников. Если в исходном многограннике  $X$  в какой-то вершине сходилось  $m$  ребер, то вокруг этой вершины  $X$  образуется  $2m$ -угольник многогранника  $Z$  (рис. б);
- вместо ребер старого многогранника  $X$  возникают «повернутые» на  $90^\circ$  ребра нового многогранника  $Z$  (рис. б).

**1. Из какого многогранника  $X$  в результате «чехарды» получается усеченный куб (рис. 16)? (2.5 балла)**

Треугольные грани  $Z$  на рис. 16 условия могли появиться только из треугольников исходного  $X$  (поскольку 3 – нечетное число), значит, исходный многогранник имеет 8 треугольных граней. Оставшиеся 6-ть 8-миугольных граней усеченного куба – это упомянутый выше «появившийся» вокруг 6-ти вершин исходного  $X$  новый тип граней. Т.е. в каждой из 6-ти вершин  $X$  сходилось по  $8/2 = 4$  ребра (4 грани). Многогранник  $X$ , в котором 6 вершин, в каждой из которых сходится по 4 треугольных грани – это четырехугольная бипирамида, состоящая из равносторонних треугольников – **октаэдр** (рис. в).

2. Опишите (проиллюстрировав рисунками), какие структурные элементы  $C_z$  образуются внутри пяти- и шестиугольников исходного фуллерена  $C_x$ , а также на его связях и вокруг его вершин. (3 балла)

Внутри пятиугольников возникают пятиугольники, внутри шестиугольников – шестиугольники; на месте связей возникают «повернутые» связи; вокруг вершин старого фуллерена возникают шестиугольники нового фуллерена (рис. а,б).

3. Выразите число вершин нового фуллерена  $z$  через число вершин исходного  $x$ . (4 балла)

Поскольку внутри пятиугольников и шестиугольников старого фуллерена  $C_x$  образуются соответственно пятиугольники и шестиугольники нового фуллерена (рис.а), значит, формула нового фуллерена будет:

$$z = 5\Gamma_5 + 6\Gamma_6 = 5 \cdot 12 + 6 \cdot (x-20)/2 = 60 + 3x - 60 = 3x$$

где  $\Gamma_5$  и  $\Gamma_6$  – количество 5-ти и 6-ти угольников старого фуллерена  $C_x$ , соответственно; согласно указаниям в конце задач можно было использовать без вывода  $\Gamma_5 = 12$  и  $\Gamma_6 = (x-20)/2$

4. Чему равно минимально возможное значение  $z$  при чехарде фуллеренов? (2.5 балла)

Очевидно, полученный в результате чехарды фуллерен с минимальным числом вершин может быть получен из фуллерена  $C_x$  с минимальным числом вершин. Поскольку для любого фуллерена  $\Gamma_5 = 12$  и  $\Gamma_6 = (x-20)/2$ , то это имеющий форму додекаэдра фуллерен  $C_{20}$  (содержит 0 шестиугольников, и 12 пятиугольников). Из него чехардой получится фуллерен, в котором в 3 раза больше вершин, т.е.  $C_{60}$  (это именно бакибол с разделенными пятиугольниками, а не какой-то его другой его изомер).

Может ли при этом исходный фуллерен  $C_x$  быть получен в результате чехарды из некоторого другого многогранника? Поясните. (3 балла)

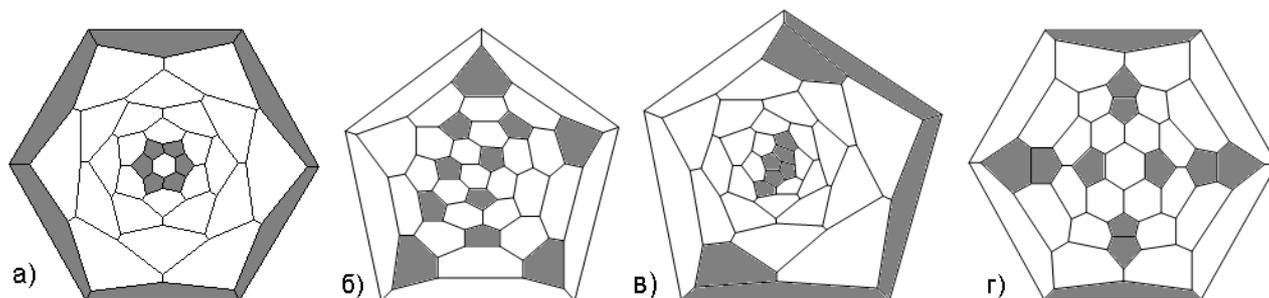
При чехарде каждая вершина исходного многогранника  $X$  приводит к граням  $Z$  с четным числом вершин (рис. б). Поскольку в додекаэдре нет ни одной такой грани, то он заведомо не может быть получен в результате чехарды (несмотря на то, что существует соответствующий додекаэдру промежуточный двойственный многогранник  $Y$  – икосаэдр).

5. Какая главная структурная особенность расположения пятиугольников существует для всех полученных чехардой фуллеренов? (2 балла)

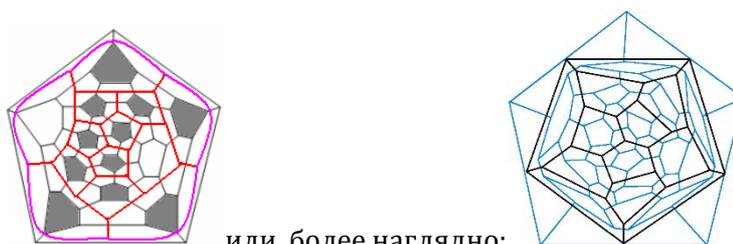
Поскольку пятиугольники нового фуллерена  $C_z$  оказываются внутри пятиугольников исходного, и вокруг каждой вершины пятиугольников исходного фуллерена после чехарды образуются шестиугольники (см. рис. 1 а,б) то все пятиугольники нового фуллерена  $C_z$  оказываются **разделены** шестиугольниками.

На рисунке 2 найдите структурный изомер  $C_{72}$ , который получается операцией чехарды. Ответ обоснуйте. (3 балла)

Значит, фуллерены, которые не содержат разделенных пятиугольников, заведомо не могут быть получены в результате чехарды. Для ответа на вопрос необходимо найти пятиугольники на приведенных проекциях Шлегеля (например, закрашивая их). Все изомеры кроме (б) не содержат разделенных пятиугольников, значит, только он мог быть получен в результате операции чехарды из фуллерена  $C_{24}$ .



Так же этот пункт можно было решать графически: попробовать построить вокруг каждого пятиугольника на данных в условии проекциях Шлегеля изомеров  $C_{72}$  пятиугольники исходного фуллера  $C_x$ . Несложно убедиться, что построенные таким образом пятиугольники смогут «сложиться» в фуллерен только для (б).



или, более наглядно:

## 8. Биоинформатика, часть 2: Архиватор для хомячка

(20 баллов)

Информация на компьютере хранится в ячейках памяти, каждая из которых может принимать значение 0 или 1 и несет один бит информации. Для записи (кодирования) любого символа в текстовом файле используются 8 таких ячеек (8 бит).

У юного нанотехнолога Полуэкта есть текстовый файл размером ровно 3 000 мегабайт, в котором только четырьмя символами, отвечающими нуклеотидам (A, C, G, T), записан фрагмент генома сирийского хомячка (*Mesocricetus auratus*).

**A**CTCATTGCACATATAGTAGACACATAGCTCGTATGTCTACAGACACACTCCGTCAGAGTGAGTACAGACATCTG  
**A**AGGGCGGGGACAGCTGCAGCTCGTGCAGACGAGGATTACSTTTCGTGAGTATATCATTGTACTAGCTCTCCGTCGA

### 1. Рассчитайте общее число символов нуклеотидов в файле. (2 балла)

Для домашней работы Полуэкт решил скопировать этот файл к себе на флешку. Однако на ней оставалось свободно только 810 мегабайт, а имеющийся у него популярный архиватор смог заархивировать (сжать)<sup>1</sup> файл лишь до ~843.2 мегабайт. Сначала Полуэкт расстроился, что ему придется удалить часть информации с флешки, затем он быстро смекнул, как написать простейший архиватор, который сможет сжать файл, а затем распаковать его обратно дома.



2. Какое минимальное количество информации требуется, чтобы закодировать произвольный нуклеотид в последовательности? Найдите размер архива, получившегося у Полуэкта, и вкратце опишите алгоритм работы архиватора. (4 балла)

Дома Полуэкт случайно открыл архив в текстовом редакторе и, листая, обнаружил слово «нано»<sup>2</sup>.

3. Какова длина нуклеотидной последовательности, закодированной в этом слове? Рассчитайте, сколько раз слово «нано» будет встречаться в архиве, полученном сжатием по такому же алгоритму случайной нуклеотидной последовательности размером 1 терабайт. (5 баллов)

4. Сколько разных нуклеотидных последовательностей может кодировать это слово? (3 балла)

Открыв архив в шестнадцатеричном редакторе (позволяет увидеть в шестнадцатеричном виде находящуюся в ячейках памяти компьютера информацию), Полуэкт обнаружил, что буквам *n*, *a*, *o* соответствуют числа  $ED_{16}$ ,  $E0_{16}$ ,  $EE_{16}$ .

```
FF CD B4 FA 5E 55 75 42 27 ED E0 ED EE 2E B9 2B яНгъ^UчВ'нано.№+
CB C5 2E 64 35 F0 7C CB 5A CF 2C 87 7A 4A A6 CC LE.d5p|L2П,#zJ|M
```

5. Расшифруйте соответствующую этому слову нуклеотидную последовательность, если новые символы нуклеотидов в ней появляются в обратном алфавитному порядку<sup>3</sup>. (6 баллов)

<sup>1</sup> Сжатие (упаковка) данных – алгоритмическое преобразование данных, производимое с целью уменьшения занимаемого ими объёма. Программа, осуществляющая процедуры сжатия и распаковки, называется архиватором.

<sup>2</sup> Написанное строчными русскими буквами. Коды больших и маленьких, а также русских и английских букв различаются.

<sup>3</sup> Примером последовательности нуклеотидов с таким же «порядком появления» символов является TTGTGCCTCGAA

При решении не забывайте, что  $0_{16} = 0_{10} \dots F_{16} = 15_{10}$

Вспомогательная информация:

Фуллерен – каркасная молекула углерода. Может быть описан как выпуклый многогранник, составленный из правильных пяти- и шестиугольников, в каждой вершине которого сходятся по три ребра. Любой фуллерен может быть представлен в виде диаграммы Шлегеля – плоской проекции на одну из граней.

Число пятиугольников в произвольном фуллерене  $C_n$  составляет  $\Gamma_5 = 12$ , шестиугольников –  $\Gamma_6 = 0.5(n - 20)$ .

$$\pi = 3.1; \sqrt{2} \approx 1.4, \sqrt{3} \approx 1.7, \sqrt{5} \approx 2.2, \sqrt{7} \approx 2.6, \sqrt[3]{2} \approx 1.3, \sqrt[3]{3} \approx 1.4, \sqrt[3]{5} \approx 1.7.$$

Формула суммы квадратов последовательности натуральных чисел 1, 2, ..., n:

$$\sum_{m=1}^{m=n} m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Решение:**

**1. Рассчитайте общее число символов нуклеотидов в файле. (2 балла)**

1 килобайт = 1024 ( $2^{10}$ ) байт, 1 мегабайт = 1024 килобайт, 1 символ = 8 бит = 1 байт. Значит, файл содержит столько же символов, сколько и байт. Т.е. в файле 3 000 мегабайт записана информация о  $3000 \cdot 1024 \cdot 1024 = 3000 \cdot (1000+24)^2 = 3000 \cdot (1000^2 + 2 \cdot 24000 + 24^2) = 3000 \cdot 1048576 = 3\,145\,728\,000$  нуклеотидах.

**2. Какое минимальное количество информации требуется, чтобы закодировать произвольный нуклеотид в последовательности? Найдите размер архива, получившегося у Полуэкта, и вкратце опишите алгоритм работы архиватора. (4 балла)**

Поскольку символов нуклеотидов всего 4, то для их кодирования можно использовать меньшее число бит, чем для кодирования произвольного текстового символа. 4-м вариантам нуклеотида можно сопоставить 4 значения двух ячеек памяти (два бита,  $\log_2 4 = 2$ ): 00, 01, 10, 11. Значит, число кодирующих символ бит можно уменьшить в  $8/2 = 4$  раза, размер файла при этом составит  $3000/4 = \mathbf{750}$  Мб. Архиватор Полуэкта читает символ из файла и в соответствии с выбранной Полуэктом таблицей соответствия символов пишет в итоговый файл соответствующие символу значения 2-х бит. При распаковке файла, наоборот: читает по 2 бита, и в соответствии с той же таблицей пишет в распакованный файл текстовый символ нуклеотида.

**3. Какова длина нуклеотидной последовательности, закодированной в этом слове? Рассчитайте, сколько раз слово «нано» будет встречаться в архиве, полученном сжатием по такому же алгоритму случайной нуклеотидной последовательности размером 1 терабайт. (5 баллов)**

Поскольку каждой букве текстового файла соответствуют 8 бит, а заархивированному нуклеотиду 2, то в коде одной буквы архива содержится информация о 4-х нуклеотидах. Тогда слову «нано» в архиве соответствует последовательность из  $4 \cdot 4 = \mathbf{16}$ -ти нуклеотидов.

Нуклеотидная последовательность, занимающая 1 **терабайт**, содержит  $2^{40}$  нуклеотидов (килобайт -  $2^{10}$ , мегабайт -  $2^{20}$ , гигабайт -  $2^{30}$ , терабайт -  $2^{40}$ ). Поскольку в каждом положении последовательности может быть один из 4-х нуклеотидов, то вероятность того, что произвольная последовательность 16-ти нуклеотидов случайно совпадет с предварительно заданной последовательностью, составит  $(\frac{1}{4})^{16} = 2^{-32}$ .

В случайной последовательности из  $2^{40}$  нуклеотидов содержится  $2^{40} \cdot 16 \approx 2^{40}$  последовательностей из 16-ти нуклеотидов, каждая из которых имеет вероятность  $2^{-32}$  совпасть с заданной (приводящей к слову «нано»). Следовательно, после описанного архивирования 1 терабайта случайных нуклеотидов в среднем получается  $2^{40} \cdot 2^{-32} = 2^8 = \mathbf{256}$  слов «нано».

**4. Сколько разных нуклеотидных последовательностей может кодировать это слово? (3 балла)**

Количество последовательностей равно числу возможных вариантов таблиц соответствия 4-м буквам нуклеотидов (А, С, G, Т) 4-х значений 2-х бит (00, 01, 10, 11) – т.е. числу размещений из 4 по 4 (числу перестановок порядка 4):  $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{24}$

**5. Расшифруйте соответствующую этому слову нуклеотидную последовательность, если новые символы нуклеотидов в ней появляются в обратном алфавитному порядке. (6 баллов)**

Найдем, какие последовательности нулей и единиц сопоставлены каждой русской букве. Для этого переведем шестнадцатеричные коды в двоичные (через десятичную систему)

$$\mathbf{ED}_{16} = 14 \cdot 16^1 + 13 \cdot 16^0 = 237_{10}$$

$$237/2=118,5 (1); 118/2=59 (0); 59/2=29,5 (1); 29/2 = 14,5 (1); 14/2 = 7 (0); 7/2 = 3,5 (1); 3/2=1,5 (1); 1/2=0,5 (1)$$

$$\mathbf{ED}_{16} = 237_{10} = 11101101_2$$

$$\mathbf{EO}_{16} = 14 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^0 = 224_{10}$$

$$224/2=112 (0); 112/2=56 (0); 56/2=28 (0); 28/2 = 14 (0); 14/2 = 7 (0); 7/2 = 3,5 (1); 3/2=1,5 (1); 1/2=0,5 (1)$$

$$\mathbf{EO}_{16} = 224_{10} = 11100000_2$$

$$\mathbf{EE}_{16} = 14 \cdot 16^1 + 14 \cdot 16^0 = 238_{10}$$

$$238/2=119 (0); 119/2=59,5 (1); 59/2=29,5 (1); 29/2 = 14,5 (1); 14/2 = 7 (0); 7/2 = 3,5 (1); 3/2=1,5 (1); 1/2=0,5 (1)$$

$$\mathbf{EE}_{16} = 238_{10} = 11101110_2$$

Получается, что слову «нано» соответствует следующая последовательность бит:

н а н о  
 /-----\ /-----\ /-----\ /-----\  
 11101101|11100000|11101101|11101110

поскольку для кодирования каждого нуклеотида требуется 2 бита, а новые нуклеотиды в последовательности, согласно условию, появляются в обратном алфавитному порядку, то можем сопоставить:

11 10 11 01    11 10 00 00    11 10 11 01    11 10 11 10  
 Т G Т С      Т G А А      Т G Т С      Т G Т G

Отметим, что Полуэкт присвоил алфавитному порядку символов нуклеотидов двоичные коды в порядке возрастания: А ↔ 00, С ↔ 01, G ↔ 10, Т ↔ 11

## Биология

### Простые задачи

#### Задача 1

(8 баллов)

Строение крыла представителей отряда чешуекрылых натолкнуло несколько групп нанотехнологов на создание наноструктур, которые могут в будущем существенно модернизировать уже существующие на данный момент технологии по созданию солнечных батарей.

Крылья какого насекомого послужили примером для создания подобных наноструктур:

а) стрекозы; б) мухи; в) бабочки; г) осы; д) богомола; е) блохи (1 балл)

Как вы думаете, какие преимущества получают солнечные батареи разработанные на основе нанотехнологий? (2 балла)

Как вы думаете, зачем подобные наноструктуры этим насекомым? (4 балла)

Какие приборы можно модернизировать, если использовать при их изготовлении наноструктуры схожие с теми, которые есть у насекомых. (1 балл)

**Ответ:**

1. К отряду чешуекрылых относятся бабочки - вариант в (1 балл)
2. Подобные батареи точно будут поглощать больше падающего на них света, меньше его отражать, – то есть будут более эффективными и плюс к этому, они будут еще и более легкими. Возможно, что они будут и более долговечными и дешевыми в производстве. (2 балла)
3. Насекомые хладнокровные животные – для полета им нужно, чтобы мускулы крыльев были хорошо прогреты, крылья тех видов бабочек, которые поглощают свет более эффективно, лучше прогревают мускулы и все тело бабочки даже в пасмурную погоду. Эти же наноструктуры могут менять цвет насекомого делая его менее заметным для хищников или же наоборот их отпугивать. (4 балла)
4. Кроме солнечных батарей способность не отражать свет можно использовать при создании мониторов или дисплеев. А создание наноструктур подобных тем, которые находятся в сетчатке глаз насекомых можно использовать для создания микрикамер и различных оптических сенсоров. (1 балл)

#### Задача 2

(8 баллов)

В лаборатории были созданы несколько серий медицинских нанороботов для экстренной диагностики различных патологий. При производстве одной из серий произошла ошибка: нанороботы вместо того, чтобы встраиваться в мембрану клеток и сообщать о соотношении находящихся в ней липидов, делали большие поры в мембране клеток, вызывая их гибель.

Часть этих бракованных нанороботов могла быть доставлена на космическую станцию к доктору Кто. У доктора Кто было 5 пробирок, в каждой из которых содержались разбавленные суспензии клеток. В пробирке 1 – суспензия макрофагов, в пробирке 2 –

суспензия клеток плоского эпителия, в пробирке 3 – суспензия эритроцитов, в пробирке 4 – суспензия нейронов, в пробирке 5 – суспензия кардиомиоцитов.

Доктор Кто выбрал одну из пробирок и, не используя никаких вспомогательных приборов, кроме центрифуги, сумел выяснить, что доставленные ему нанороботы не бракованные.

Какую пробирку выбрал для проверки доктор Кто? (2 балла) Зачем ему нужна была центрифуга? (2 балла)

Как ему удалось выяснить что его нанороботы не бракованные? (4 балла)

**Ответ:**

Доктор Кто выбрал пробирку 3 – с суспензией эритроцитов и добавил к ней нанороботов. Если бы нанороботы были бракованными – то эритроциты бы лопались и начал выходить содержащийся в них гемоглобин. При осаждении на центрифуге мембран эритроцитов – раствор для суспензии стал бы розово-красного цвета, в зависимости от концентрации эритроцитов в суспензии. Так как эритроциты не лопнули – то цвет раствора для получения суспензии клеток не изменился. Центрифуга ему нужна была, так как на космической станции нет силы тяжести.

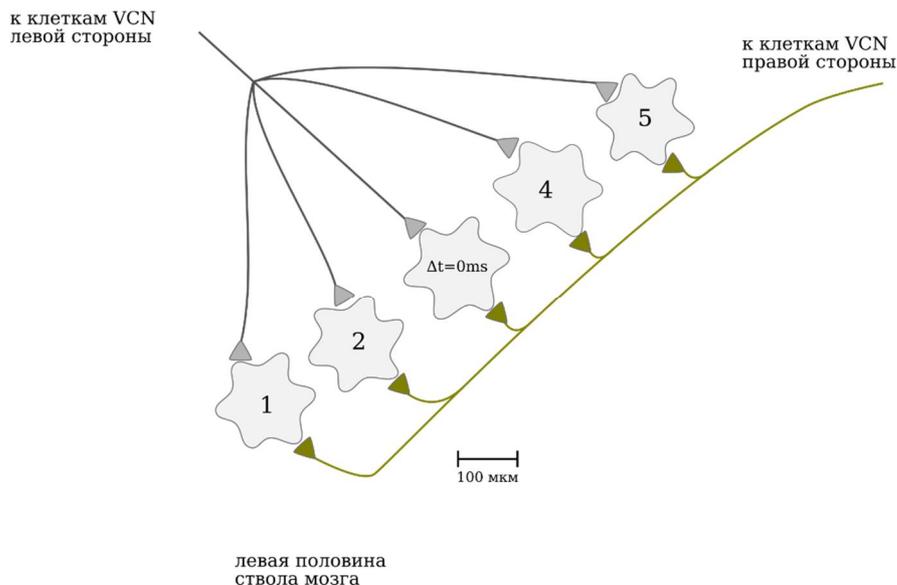
### **Задача 3**

(8 баллов)

Обработкой слуховой информации занимается множество нейронов, как в коре, так и в нижележащих структурах мозга. В частности, слуховые волокна активируют «кустистые» нейроны т.н. вентрального кохлеарного ганглия в стволе мозга (VCN), а те, в свою очередь, иннервируют нейроны т.н. верхней «оливы» в Варолиевом мосту мозга. Активность тех или иных нейронов оливы кодирует положение источника звука в горизонтальной плоскости: в зависимости от азимута источника звука, звуковая волна раньше придет в левое или правое ухо, и, следовательно, раньше будут активированы левые или правые нейроны VCN. На схеме показана иннервация нейронов оливы. Предположим, что эти нейроны могут активироваться только если возбуждающие синапсы от обоих афферентных нейронов выделяют нейромедиатор одновременно. Пусть, если левые и правые нейроны VCN активируются одновременно (источник звука находится прямо впереди), возбуждается центральный нейрон.

Опишите последовательность событий, происходящих при работе синапса (3 балла)

Чем определяется скорость распространения потенциалов действия по нервным волокнам? (1



балл)

Источник звука находится слева, и задержка между активацией клеток VCN составляет около 0.1 мс. Какая клетка будет активирована? (2 балла). Какая клетка (или клетки) будет активирована, если задержка составляет 0.2 мс? (2 балла) (Считайте, что скорость распространения импульсов по этим частям нервных волокон около 2 м/с)

**Ответ:**

Опишите последовательность событий, происходящих при работе синапса (3 балла)

Чем определяется скорость распространения потенциалов действия по нервным волокнам? (1 балл)

Деполаризация пресинаптической мембраны → вход ионов  $Ca^{2+}$  → слияние пузырьков с нейромедиатором с плазматической мембраной → выход медиатора в синаптическую щель → связывание медиатора с рецепторами на постсинаптической мембране → активация рецепторов → развитие деполяризующих или гиперполяризующих постсинаптических токов → убиение медиатора из синаптической щели (разные механизмы).

Источник звука находится слева, и задержка между активацией клеток VCN составляет около 0.1 мс. Какая клетка будет активирована? (2 балла). Какая клетка (или клетки) будет активирована, если задержка составляет 0.2 мс? (2 балла) (Считайте, что скорость распространения импульсов по этим частям нервных волокон около 2 м/с)

Источник звука находится слева, поэтому клетки правой стороны будут запаздывать и, следовательно, должны активироваться нейроны, образующие на аксоне из правого VCN синапсы, лежащие ближе к телу клетки (потенциал действия не успеет пройти дальше). Исходя из приведенного масштаба и скорости распространения импульсов, при задержки в 0.1 мс будет активироваться нейрон 4, а при увеличении задержки – нейрон 5.

#### Задача 4

(8 баллов)

Самцы морских ракообразных семейства *Sapphirinidae* обладают удивительно яркой окраской и, плавая по спирали в толще воды, то «вспыхивают» различными цветами, то становятся «невидимками» и мгновенно исчезают из виду. Окраска возникает благодаря отражению света от упорядоченных слоев гексагональных чешуек кристаллического гуанина, 70 нм в толщину, разделенных прослойками цитоплазмы. Любопытно, что окраска различных видов этого семейства коррелирует с предпочитаемой глубиной обитания.

Какую роль в жизни этих ракообразных может играть такая яркая окраска? (1 балл)

Почему, плавая по спирали, эти рачки то «вспыхивают», то исчезают из виду? (1 балл)

Будет ли цвет этих рачков зависеть от угла падающего света? (1 балл)

У вида *Copilia quadrata* цвет синий либо сине-зеленый, а у вида *Sapphirina auronitens* преобладают «теплые» желто-золотистые цвета. Предположите, какой из видов обитает в более глубоких водах, а какой – в приповерхностных (ответ обоснуйте). (3 балла)

У какого вида расстояние между слоями иридофоров будет больше и почему? (2 балла)

**Ответ:**

Ответы на общую часть вопроса:

1. «обман зрения» потенциальных хищников, внутривидовое общение: окрашены только самцы, а значит, может играть роль в поиске партнера для размножения. Возможны и другие варианты, принимаются все обоснованные
2. Благодаря двойному лучепреломлению, цвет и отражающая способность кристаллов зависит от угла падающего света. Под многими углами, основной максимум поглощения оказывается за пределами видимого спектра, и животные становятся прозрачными.
3. Да, см выше.

Ответ на вариативную часть вопроса:

1. В окраска видов, обитающих в более глубоких слоях воды преобладают синие и сине-зеленые цвета, тогда как у видов, предпочитающих приповерхностные слои воды, окраска содержит «теплые» более длинноволновые оттенки. Это связано со спектром поглощения (и, соответственно, фильтрацией) столба океанской воды. Практически все длинноволновые (от красного до желтого) компоненты света поглощаются самыми верхними слоями воды, и до более глубоких слоев доходят только синие и зеленые фотоны.
2. Расстояние между слоями кристаллов должно соответствовать длине волны отражаемого света – у более «коротковолновых» отражателей толщина цитоплазматических слоев будет меньше.

Исключение составляет *S. metallina*, у которой самое большое расстояние между слоями иридофоров, и в видимую область попадает и вторичный пик отражения, что приводит к смешению красного и синего цветов (пурпурный/magenta), однако это не обязательно знать для получения полного балла.

### **Задача 5**

(8 баллов)

Генотип	Фенотип
WW, Ww	полностью белый
ww	окрашенный
BB, Bb	черный цвет
bb	шоколадная
X <sup>o</sup> X <sup>o</sup> , X <sup>o</sup> Y	окраска красных оттенков (рыжий), не синтезируется эумеланин
X <sup>o</sup> X <sup>o</sup>	окраска темных оттенков, не синтезируется феомеланин
X <sup>o</sup> X <sup>o</sup>	мозаичная смешанная красно-черная (черепаховая) окраска

Окрас кошек обусловлен наличием и сочетанием всего двух пигментов: черного эумеланина (производными от него являются пигменты дающие коричневые и коричные оттенки) и желтого феомеланина (дающего в зависимости от условий красно-желто-оранжевые оттенки).

За синтез пигмента эумеланина отвечает мультиаллельный ген Black (B); при этом его доминантный аллель B формирует нормальную форму пигмента (черную), а рецессивные - окисленную,- шоколадную (bb).

За развитие красных (рыжих) окрасов отвечает, сцепленный с полом, находящийся на X-хромосоме ген, O. Его действие приводит к нарушению синтеза эумеланина, в результате чего клетки образуют только желтый пигмент, от количества которого и будет зависеть интенсивность окрашивания шерсти кошки: от бледно-рыжего до кирпично-красного. У самок гомозигот X<sup>o</sup>X<sup>o</sup> будет наблюдаться окраска красных оттенков, гомозигот X<sup>o</sup>X<sup>o</sup> – темных оттенков, гетерозигот X<sup>o</sup>X<sup>o</sup> – будет наблюдаться мозаичная смешанная красно-черная (черепаховая) окраска, обусловленная синтезом обеих форм меланина.

Развитие окраса начинается на эмбриональной стадии в процессе развития пигментных клеток. Считается что за транспортировку пигментных (пропигментных) клеток в центр пигментации отвечает ген доминантного белого окраса, W. В случае если ген W находится в доминантной форме W пропигментные клетки не проникают в центр пигментации, животное, носитель доминантной формы гена, остается белым. В случае проявления этого гена, гены, отвечающие за другие цвета и рисунки полностью скрыты, хотя и могут присутствовать.

У кошки с генотипом WwbbX<sup>o</sup>X<sup>o</sup> родилось 4 котенка: 2 белых, один шоколадный и один рыжий. Одновременно у кошки с генотипом wwBBX<sup>o</sup>X<sup>o</sup> от этого же кота родились 4 котенка - два черных кота и две черепаховых (черно-красных) кошки.

Каков фенотип у мам кошек (1 балл)?

Как Вы думаете, почему у первой кошки, наблюдается «неправильное» распределение некоторых признаков у котят (2 балла)?

Определите фенотип отца, обоснуйте свои выводы (5 баллов)?

**Ответ:**

Фенотип кошек – белая и черная.

На самом деле количество котят очень мало, чтобы делать уверенные выводы. Тем не менее, можно предположить, отец не был белым котом (у второй кошки не родилось ни одного белого котенка).

Наличие черепаховых котят (и отсутствие рыжих котов) в потомстве второй кошки позволяет предположить, что отец – рыжий кот.

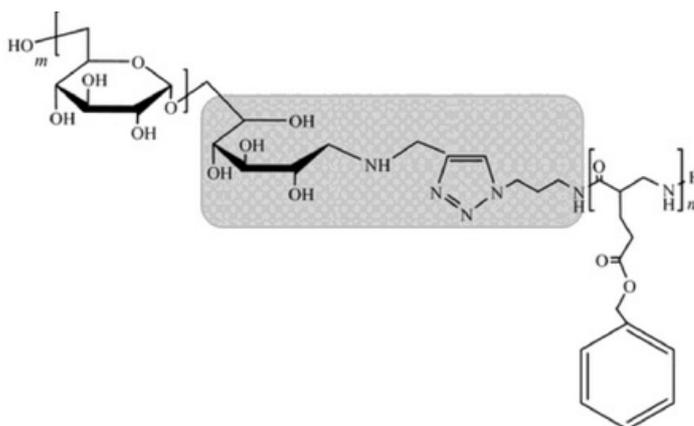
«Неправильное» соотношение котят по некоторым признакам в первом приплоде, можно объяснить действием гена W, подавляющего все остальные признаки.

Вероятный фенотип отца – рыжий кот (допускаются и другие варианты при условии их логичного обоснования).

### Более сложные задачи

#### Задача 6

(20 баллов)



Как альтернативу липосомам ученые синтезировали молекулу, изображенную на картинке.

Из каких двух составных веществ она состоит? (2 балла)

Что может произойти при попытке растворить это вещество в воде? (6 баллов)

Благодаря каким свойствам этого вещества это может произойти? (4 балла)

Назовите примеры таких веществ, имеющих биологическое происхождение. (4 балла)

Как можно использовать свойство этих веществ в медицине? (4 балла)

**Ответ:**

\*Ravin Narain «Engineered Carbohydrate-Based Materials for Biomedical Applications: Polymers, Surfaces, Dendrimers, Nanoparticles, and Hydrogels». 2011.

1. Это вещество гликопротеин, в нем остатки полисахаридов связаны ковалентной связью (N-гликозидной) с полипептидными цепями белка.

2. При попытке растворения этого вещества в воде – произойдет спонтанная самоорганизация этого вещества в нанопузырьки, мембрана которых будет состоять из двух слоев.
3. Это произойдет благодаря тому, что белковая часть гидрофобна, а углеводная – гидрофильна.
4. К гликопротеинам относят белки сыворотки крови, рецепторные белки, антитела и др.
5. Так как эти гликопротеины образуют нанопузырьки, то их можно использовать для адресной доставки лекарств.

### **Задача 7**

(20 баллов)

У любой продукции есть срок годности и определённые условия хранения, в том числе и у лекарств. Использовать лекарства после истечения срока годности не рекомендуется по самым разным причинам, ещё более строгие ограничения накладываются на использование лекарств, которые хранились с нарушением необходимых условий.

Вопросы:

1. Как вы думаете, каким образом определяют срок годности лекарства (3 балла)? Что происходит с лекарствами после истечения срока годности и что будет, если их продолжать использовать (3 балла)?
2. Почему многие лекарства нельзя хранить на свету (2 балла)? Почему некоторые препараты, например, мази, гели и капли в нос с интерфероном надо хранить в холодильнике (2 балла)?
3. Для лечения насморка сейчас врачи часто назначают препарат "Сиалор". Он представляет собой прессованную таблетку из протеината серебра, которую перед использованием растворяют в определённом объёме очищенной воды. Получается коллоидный раствор с ионами серебра, который закапывают в нос. Использовать его можно только в течение нескольких недель при хранении в темноте. А несколько лет назад в качестве альтернативного средства для лечения насморка предлагали использовать коллоидный раствор серебра, который также надо было хранить в темноте и использовать в течение ограниченного времени.
- 3.1. Предложите возможные механизмы действия Сиалора и коллоидного раствора наночастиц серебра (2 балла)?
- 3.2. Как Вы думаете, что происходит с обоими препаратами после окончания срока хранения (1 балла) и почему их нельзя хранить на свету (1 балла)?
- 3.3. Предположите, какой препарат (Сиалор или раствор с наночастицами серебра) может быть более эффективным (1 балл) и безопасным (1 балл) при лечении насморка?
- 3.4. Как вы считаете, могут ли наночастицы серебра накапливаться в каких-то структурах и клетках носоглотки (1 балл)? Каких (1 балл)? Каким образом они будут оттуда выводиться (2 балла)?

Все ответы обоснуйте.

**Ответ:**

1. Возможно несколько подходов. Например, с определённым промежутком времени определяют состав лекарства. Если состав не изменяется (то есть, нет распада, окисления и т.д.) молекул, входящих в его состав, значит, лекарство ещё можно использовать. Другой способ – это определять изменение активности препарата с течением времени. Например, активность антибиотика в подавлении какого-то штамма бактерий или активность фермента.

Как правило, лекарство после истечения срока годности теряет часть своих свойств и становится менее эффективным (или совсем не эффективным). Соответственно, применение лекарства не будет иметь никакого положительного действия. Теоретически в процессе "старения" лекарства могут образовываться продукты распада, которые могут оказывать неблагоприятное, даже токсическое действие на организм.

2. Из-за фотоповреждения под действием солнечных лучей. Действие света может ускорять разрушение лекарственного препарата, приводить к окислению молекул лекарства и образованию токсических продуктов.

Перечисленные препараты нужно хранить в холодильнике, поскольку они содержат интерфероны (белки), которые при комнатной температуре будут быстро портиться: для них характерны процессы окисления и протеолитической деградации. В результате этих процессов препарат потеряет свою противовирусную активность.

3.

3.1. В обоих случаях действие препаратов основано на антибактериальном действии ионов серебра. Предполагается, что в случае наночастиц действующим веществом являются ионы серебра, в незначительном количестве образующиеся на поверхности наночастиц. Также может действовать супероксид анион радикал, образующийся на поверхности самых маленьких наночастиц с диаметром меньше 5 нм. В некоторых случаях сами наночастицы могут механически повреждать клеточные стенки бактерий.

3.2. С течением времени наночастицы в коллоиде агрегируют, образуя все более и более крупные частицы и в последствие выпадая в осадок. Такие крупные агрегаты не будут обладать антибактериальной активностью и могут раздражать слизистую носа.

Действие солнечных лучей также может вызывать агрегацию наночастиц и выпадение в осадок.

В случае препарата «Сиалор» (протеината серебра – серебра, связанного с белком) длительное хранение может приводить к повреждению белка, в том числе, появлению бактерий, образованию крупных агрегатов и проч.

3.3. Можно предположить, что безопаснее применять протеинат серебра (Сиалор), чем коллоидный раствор наночастиц, поскольку наночастицы могут задерживаться и накапливаться в клетках слизистой носа и, теоретически, проникать в клетки. Кроме того, при проглатывании коллоидного раствора наночастицы будут попадать в желудок и кишечник, что может приводить к накоплению наночастиц в их клетках. Про эффективность препарата засчитывается любой здоровый обоснованный вариант.

3.4. Наночастицы могут накапливаться у поверхности ворсинок слизистой носа и выводиться при чихании и обновлении слизистой. Также наночастицы могут эндцитироваться макрофагами, проникающими в слизистую носа, и таким образом, могут накапливаться в них. При попадании в пищевод (при обильном закапывании) наночастицы могут накапливаться в клетках желудка и кишечника или около их стенок. Протеинат

серебра, скорее всего, будет накапливаться преимущественно в слизистой носовой полости, выводится при чихании, а при проглатывании будет расщепляться протеазами в желудке.

### **Задача 8**

(20 баллов)

«... нет, не так представлял я себе занятия оптогенетикой» — думал магистрант Петя Репкин, мрачно разглядывая пробирки с белесым кормом, в которых жили его трансгенные мушки дрозофилы. «Вроде бы, все шло по плану — вот линия мух, у которых в нейронах, под промотор гена, кодирующего рецептор сладкого вкуса Gr5a был вставлен и ген, кодирующий белок GAL4 (активатор транскрипции из дрожжей). Вот — линия мух, у которых в геном, рядом с последовательностью нуклеотидов, которую узнает GAL4, встроен ген, кодирующий канал-опсин со спектром поглощения, смещенным в длинноволновую область спектра. Вот — их потомство, которое, как ожидалось, будет рефлекторно вытягивать хоботок при освещении красным лазером, точно так же, как делают все мухи, касаясь сахарного сиропа. Однако, на свет мухи не реагировали...

Своими неудачами Петя поделился с аспиранткой из соседней лаборатории Машей Морковкиной, встретив ее возле автомата с кофе. «Ну давай, я возьму твоих мух к себе на пару дней, посмотрю, что может быть не так?» — предложила Маша.

Через несколько дней Маша принесла мух обратно: «Да все у тебя работает, зря ты переживал!» И точно, эксперимент с вытягиванием хоботка при освещении лазером теперь удавался, и Петя удивленно уставился на довольную Машу, на мух, которые, казалось, тоже довольные, поедали веселенький желтоватый корм.

— Ничего не понимаю, ведь мухи-то те же самые?

— Мушки-то те же, а все дело в ...

*Вопросы:*

1. Почему не получился эксперимент у Пети, но получился у Маши? (5 баллов)
2. Опишите основные механизмы регуляции экспрессии генов (2 балла)
3. Почему нужно было скрещивать разные линии мух (с геном, кодирующим GAL-4 и с геном канала-опсина)? (4 балла)
4. Опишите механизм работы канал-опсинов, применяемых в оптогенетике (4 балла)
5. Почему Петя ожидал, что мухи будут вытягивать хоботок в ответ на освещение красным лазером? (2 балла)
6. Почему понадобилось использовать специальный канал-опсин именно с длинноволновым спектром поглощения? (3 балла)

**Ответ:**

1. Для работы каналродопсинов нужен транс-ретиналь. Дрозофила его не синтезирует и должна получать его с кормом. Корм сначала был белым (без ретиналя), а потом – желтым (с ретиналем), потому что Маша его поменяла.
2. См. учебник общей биологии.

3. Это удобнее с точки зрения создания разных комбинаций генетически модифицированных мух (как конструктор). Так, линия мух экспрессирующих GAL-4 в определенных клетках (т.е. с клеточно-специфичным промотором) может использоваться для экспрессии в этих клетках (у потомства) самых разных молекул (флуоресцентных белков, различных фоточувствительных каналов и т.п.), если мух этой линии скрещивать с другой линией, которая содержит нужный белок рядом с активаторной последовательностью. Тогда, в клетках, синтезирующих GAL-4, он будет связываться с активирующей последовательностью, и именно в этих клетках будет синтезирована нужная молекула. Таким образом, можно комбинировать разные варианты линий с GAL-4 и другими белками.
4. Канал-родопсины активируются светом и начинают пропускать катионы, деполяризуя мембрану.
5. Эти нейроны обуславливают рефлекторный ответ насекомого на сладкий вкус. Т.е. их активация должна приводить к осуществлению данного рефлекса. Освещение должно активировать канал-родопсины и приводить к деполяризации данных нейронов.
6. Красный свет лучше проникает под хитиновый покров насекомого, что необходимо для активации канал-родопсинов.

## Физика

### Простые задачи

#### Задача 1

Для элементного анализа пробу наночастиц готовят следующим образом: сперва её испаряют, а затем ионизируют электронным пучком. Температура кипения серебра  $T = 2485$  К, масса атома серебра  $m_{Ag} = 1.7 \cdot 10^{-25}$  кг, масса электрона  $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$  кг. Постоянная Больцмана  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К. Заряд электрона  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Энергия электронного пучка  $E_e = 70$  эВ.

Найти отношение кинетической энергии электрона к средней кинетической энергии испаренного атома серебра (**3 балла**).

Найти отношение импульса электрона к импульсу атома серебра в ионизационной камере. (**5 баллов**).

**Решение:**

$$E = \frac{3}{2} kT$$

Средняя кинетическая энергия атома:

$$\text{Импульс частицы: } p = \sqrt{2mE}.$$

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

Вариант 1.

$$\text{Средняя энергия атома серебра } E_{Ag} = \frac{3}{2} kT = 0,51 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 0,32 \text{ эВ}$$

$$70 \text{ эВ} = 1,12 \cdot 10^{-17} \text{ Дж}$$

$$\frac{E_e}{E_{Ag}} = 218$$

$$\frac{p_e}{p_{Ag}} = \frac{\sqrt{2m_e E_e}}{\sqrt{2m_{Ag} E_{Ag}}} = 0,034$$

#### Задача 2

Итальянский гравитационный интерферометр VIRGO планируется сделать на базе маятниковых зеркал, подвешенных на высоте  $L = 10$  м и массой  $M = 60$  кг. Для того, чтобы исключить паразитные соударения зеркал с твердыми частицами, их поместили в сверхвысокий вакуум. Представим себе, что с зеркалом абсолютно упруго сталкивается кремниевая наночастица с диаметром  $d = 100$  нм и горизонтальной скоростью  $v = 50$  м/с. Найдите максимальное отклонение зеркала  $l$ ? Как соотносятся (в процентах) смещения зеркала, вызванных ударом наночастицы  $l$  и распространением гравитационной волны  $l_0$ . Примите:  $l_0 = 10^{-17}$  м. Плотность кремния —  $2,3$  г/см<sup>3</sup>.

**Решение:**

Масса наночастицы:

$$m = 1/6 \pi d^3 \rho = 2300 \cdot 10^{-21} \cdot 3.14/6 = 1.2 \cdot 10^{-18} \text{ кг} \quad (14)$$

Найдем импульс зеркала, считая  $p_n$ ,  $p_k$ ,  $p_M$  — начальным и конечным импульсами наночастиц, и импульсом зеркала после соударения, соответственно:

$$p_n = p_k + p_M \quad (15)$$

$$\frac{p_n^2}{2m} = \frac{p_k^2}{2m} + \frac{p_M^2}{2M} \quad (16)$$

приравняем (3) и (2), возведённое в квадрат и поделенное на  $2m$ :

$$\frac{p_k^2}{2m} + \frac{p_M^2}{2M} = \frac{(p_k + p_M)^2}{2m} \quad (17)$$

$$\frac{p_k^2}{2m} + \frac{p_M^2}{2M} = \frac{p_k^2}{2m} + \frac{2p_k p_M}{2m} + \frac{p_M^2}{2m} \quad (18)$$

$$p_M^2 \left( \frac{1}{2M} - \frac{1}{2m} \right) = \frac{2p_k p_M}{2m} \quad (19)$$

Пренебрежём  $1/2M$ :

$$p_M \left( \frac{-1}{2m} \right) = \frac{2p_k}{2m} \quad (20)$$

Отсюда:

$$p_M = -2p_k \quad (21)$$

В итоге:

$$p_M = 2mv = 1.2 \cdot 10^{-16} \text{ кг} \cdot \text{м/с} \quad (22)$$

Энергия зеркала:

$$E = \frac{p_M^2}{2M} = \frac{1.5 \cdot 10^{-32}}{120} = 1.2 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \quad (23)$$

Высота подъёма из закона сохранения энергии

$$h = \frac{E}{Mg} = \frac{1.2 \cdot 10^{-34}}{600} = 2 \cdot 10^{-37} \text{ м} \quad (24)$$

Теперь найдём смещение маятника. Оно находится по теореме Пифагора.

$$l^2 = L^2 - (L - h)^2 \approx 2Lh \quad (25)$$

Отсюда:

$$l = \sqrt{2Lh} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 10^{-36} \cdot 10} = 2 \cdot 10^{-18} \text{ м} \quad (26)$$

Смещение из-за наночастицы составляет 20% от смещения из-за гравитационной волны.

Ответ:

$$l = 2 \cdot 10^{-18} \text{ м} = 20\% \quad (28)$$

### Задача 3

С появлением наночастиц появилась необходимость измерения их массы. Представим гипотетический масс-спектрометр для наночастиц, в котором будет использоваться эффект давления света. Прибор будет состоять из вакуумной камеры, источника света и детектора наночастиц. Для определения массы падающих наночастиц будет регистрироваться их отклонение от вертикали, вызванное действием горизонтального светового пучка, освещающего наночастицы на начальном участке их траектории.

Какое минимальное давление должен обеспечивать световой пучок высотой 40 см, чтобы сферическая наночастица радиусом 3 нм и массой  $2.6 \cdot 10^{-22}$  кг, падающая от потолка вакуумной камеры высотой 200 см без начальной скорости, отклонилась при достижении дна камеры не менее чем на 10 см? (6 баллов).

Нарисуйте траекторию движения наночастицы внутри камеры масс-спектрометра (2 балла).

**Решение:**

Для ответа на первый вопрос найдем вертикальное и горизонтальное смещение НЧ на первом участке траектории, а также затраченное время и горизонтальную скорость НЧ в конце этого участка:

$$\Delta y_1 = \frac{gt_1^2}{2}, \quad t_1 = \sqrt{\frac{2\Delta y_1}{g}} \approx 0.29 \text{ с}$$
$$\Delta x_1 = \frac{at_1^2}{2} = \frac{a\Delta y_1}{g}, \quad V_x = at_1 = a\sqrt{\frac{2\Delta y_1}{g}}$$

где горизонтальная составляющая ускорения  $a$  возникает за счет давления света  $p$  ( $S$  – площадь поперечного сечения НЧ):

$$a = \frac{F}{m} = \frac{pS}{m}$$

На втором участке НЧ движется горизонтально с постоянной скоростью  $V_x$  и при этом продолжает падать под действием силы тяжести:

$$\Delta x_2 = V_x t_2$$

где время  $t_2$  можно найти из общего времени спуска  $t$ :

$$\Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{gt^2}{2}, t = \sqrt{\frac{2(\Delta y_1 + \Delta y_2)}{g}} \approx 0.64 \text{ c}$$

$$t_2 = t - t_1 \approx 0.35 \text{ c}$$

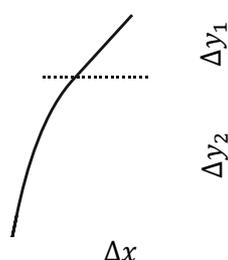
Окончательно для полного горизонтального отклонения имеем:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = a \frac{\Delta y_1}{g} + a \sqrt{\frac{2\Delta y_1}{g}} t_2 = \frac{pS}{m} \left( \frac{\Delta y_1}{g} + t_1 t_2 \right)$$

откуда получаем выражение для минимального давления:  $p_{min} = \frac{m\Delta x_{min}}{S} \left( \frac{\Delta y_1}{g} + t_1 t_2 \right)^{-1}$

$$p = \frac{2.6 \cdot 10^{-22} \cdot 0.1}{\pi \cdot (3 \cdot 10^{-9})^2} \left( \frac{0.4}{9.81} + 0.29 \cdot 0.35 \right)^{-1} \approx 6.5 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$$

Ответ на второй вопрос: траектория наночастицы на начальном участке, когда действуют и сила тяжести и световое давление – наклонная прямая, далее – отрезок параболы:



#### Задача 4

Принцип работы некоторых типов памяти состоит в считывании состояния о заряде ячейки. На проводящую подложку наносится тонкая плёнка карбида кремния. Толщина плёнки  $d = 100 \text{ нм}$ . На верхнюю поверхность пленки напыляют металлический контакт. Площадь контакта  $S = 4 \text{ см}^2$ . Удельное сопротивление карбида кремния  $\rho = 10^7 \text{ Ом}\cdot\text{м}$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon = 10$ .  $\epsilon_0 = 8 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ .

Какое напряжение возникнет между контактами, если на напыленный контакт поместить заряд  $q = 400 \text{ нКл}$ ? (5 баллов)

Найдите максимальный ток утечки заряда. (3 балла)

**Решение:**

Ячейка представляет собой плоский конденсатор.

Напряженность электрического поля, создаваемая зарядом на одной обкладке:

$$E = \frac{q}{2S\epsilon\epsilon_0} \text{ . В 2 раза меньше, чем в плоском конденсаторе, когда обе обкладки заряжены.}$$

Напряжение найдем, полагая поле однородным

$$U = Ed = \frac{qd}{2S\epsilon\epsilon_0} = \frac{400 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} \cdot 100 \cdot 10^{-9} \text{ м}}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}} = 0,625 \text{ В}$$

Сопротивление постоянному току:

$$R = \rho \frac{d}{S} = 10^7 \frac{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot 100 \cdot 10^{-9} \text{ м}}{4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 2500 \text{ Ом}$$

Максимальный ток утечки найдем по закону Ома:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{q}{2\rho\epsilon\epsilon_0} = \frac{400 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}}{2 \cdot 10^7 \text{ Ом} \cdot \text{м} \cdot 10 \cdot 8 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}} = 0,25 \text{ мА}$$

Со временем заряд на обкладке будет уменьшаться, будет уменьшаться и ток. Ток максимален в начальный момент времени.

### Задача 5

Недавно был предложен оригинальный метод создания идеально сферических наночастиц, названный лазерной печатью. Суть метода состоит в облучении тонкой пленки исходного материала (например, металла) фемтосекундным лазерным импульсом (см. рис. 1). Вследствие короткой длительности импульса происходит локальный нагрев и расплавление материала пленки с последующим формированием сферической наночастицы (см. рис. 2а). При правильном подборе энергии лазерного импульса можно добиться отрыва образовавшейся наночастицы от исходной пленки и ее переноса на прозрачную приемную подложку (см. рис. 1 и рис. 2б).

Используя рисунок 2, оценить минимальную энергию лазерного импульса, необходимую для осуществления переноса сформированной золотой наночастицы диаметром 200 нм на прозрачную приемную подложку, расположенную над пленкой на расстоянии  $\Delta z = 10 \text{ мкм}$  (**8 баллов**). Плотность золота  $19,3 \text{ г/см}^3$ , удельная теплота плавления –  $67 \text{ кДж/кг}$ , удельная теплоемкость –  $129 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ , температура плавления –  $1064 \text{ }^\circ\text{C}$ . Эксперимент проводится в вакууме, начальная температура золотой пленки  $300 \text{ К}$ .

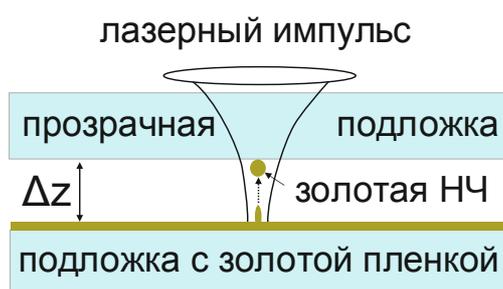


Рисунок 1. Схема метода лазерной печати.

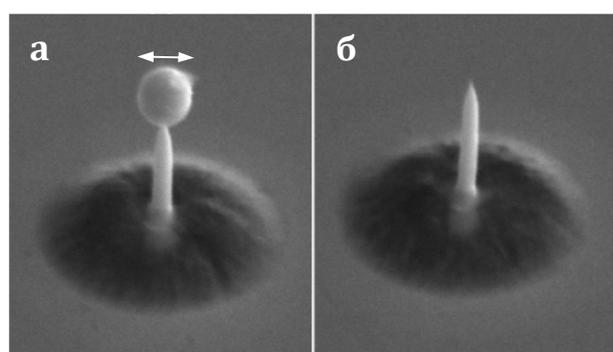


Рисунок 2. Микрофотографии поверхности золотой пленки до (а) и после (б) переноса наночастицы.

**Решение:**

Из рисунка 2 можно оценить диаметр расплавленной области как равный примерно пяти диаметрам наночастицы, т.е.  $\sim 1$  мкм. Будем считать, что эта область представляет собой полушар объемом:

$$V_{\text{полушара}} = \frac{2}{3}\pi R_{\text{полуш.}}^3, \text{ где } R_{\text{полуш.}} = 500 \text{ нм.}$$

Следовательно, масса золота, которую необходимо нагреть и расплавить:

$$m_{\text{полуш.}} = \rho V_{\text{полуш.}} = \rho \frac{2}{3}\pi R_{\text{полуш.}}^3.$$

Необходимое для этого тепло:

$$Q = (c\Delta T + \lambda)m_{\text{полуш.}}, \text{ где } \Delta T = T_{\text{плавл}} - T_{\text{нач}} = 1337 - 300 = 1037 \text{ К.}$$

Энергия лазерного импульса  $W$  будет расходоваться на нагрев и плавление золота, а также на преодоление силы тяжести при переносе наночастицы. Эта энергия будет минимальна в случае, когда скорость переносимой наночастицы будет равна нулю в момент касания приемной подложки. Таким образом, в силу закона сохранения энергии, предполагая локальный нагрев только расплавляемой области и пренебрегая затратами энергии на отрыв наночастицы от поверхности:

$$\begin{aligned} W_{\min} &= Q + m_{\text{НЧ}}g\Delta z = (c\Delta T + \lambda)\rho V_{\text{полуш.}} + \rho V_{\text{НЧ}}g\Delta z = \rho \left( (c\Delta T + \lambda)\frac{2}{3}\pi R_{\text{полуш.}}^3 + \frac{4}{3}\pi R_{\text{НЧ}}^3 g\Delta z \right) \\ &= \frac{2}{3}\pi\rho \left( (c\Delta T + \lambda)R_{\text{полуш.}}^3 + 2R_{\text{НЧ}}^3 g\Delta z \right) \\ W_{\min} &= \frac{2}{3} \cdot 3.14 \cdot 19300 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \left( \left( 129 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 1037\text{К} + 67000 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \right) \cdot (5 \cdot 10^{-7}\text{м})^3 + 2 \cdot (1 \cdot 10^{-7}\text{м})^3 \cdot 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right. \\ &\quad \left. \cdot 10^{-5}\text{м} \right) = \frac{2}{3} \cdot 3.14 \cdot 19300 (2.5 \cdot 10^{-14} + 2 \cdot 10^{-25}) \approx 1 \cdot 10^{-9} \text{ Дж} = 1 \text{ нДж.} \end{aligned}$$

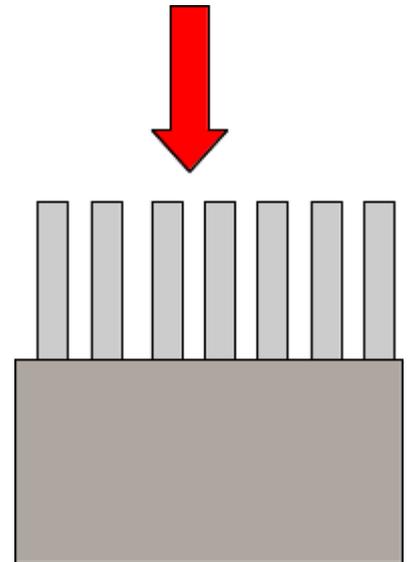
Вторым слагаемым в скобках, а именно, изменением потенциальной энергии переносимой наночастицы, можно пренебречь в силу его малости по сравнению с затратами энергии на разогрев и плавление пленки.

## Более сложные задачи

### Задача 6.

На массив вертикальных полупроводниковых нанонитей, выращенных на подложке (см. рис.), падает монохроматическая электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль нитей, имеющих диаметр  $D = 100$  нм. Амплитуда напряженности электрического поля волны равна  $E = 10^4$  В/м. При какой частоте электромагнитной волны электроны проводимости будут испытывать столкновения со стенками? Длина свободного пробега электронов проводимости превышает диаметр нанонити.  $\epsilon_0 = 8 \cdot 10^{-12}$  Ф/м,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м, заряд электрона  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл, масса электрона  $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$  кг,  $\epsilon = 16$ ,  $\mu = 1$ . Дисперсию диэлектрической проницаемости не учитывать. (10 баллов)

Рассчитать амплитуду вектора индукции магнитного поля волны (2 балла).



Оценить максимальное смещение электронов внутри нанонити под действием магнитного поля вдоль вертикали при найденной частоте волны. **(8 баллов)**

**Решение:**

Заряды будут колебаться поперек нитей (в данном случае горизонтально) за счет присутствия переменного электрического поля в электромагнитной волне.

По 2-ому закону Ньютона:

$$ma \cos(\omega t) = e \frac{E}{2\varepsilon} \cos(\omega t)$$

, где учтено, что поле внутри нити меньше в  $2\varepsilon$ .

Коэффициент 2 появляется из-за анизотропии формы.

Свободные электроны колеблются гармонически под действием волны. При высокой частоте электроны почти не смещаются от положения равновесия, а с уменьшением частоты смещение увеличивается. Амплитуда смещения в  $\omega^2$  раз отличается от амплитуды

$$a = \omega^2 \frac{L}{2}$$

ускорения:

Поэтому частота при которой амплитуда смещения электронов сравняется с радиусом нити:

$$\omega = \sqrt{\frac{2eE}{2\varepsilon mL}} = \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 10^4 \text{ В/м}}{16 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \cdot 100 \cdot 10^{-9} \text{ м}}} \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}$$

Из условия равенства плотностей энергии электрического и магнитного полей в волне следует:

$$B = \frac{E}{c} = \frac{4 \cdot 10^4 \text{ В/м}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} = \frac{4}{3} \cdot 10^{-4} \text{ Тл}, \text{ где } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0}} \text{ — скорость света в среде.}$$

Учет влияния магнитного поля позволит нам оценить вертикальное смещение электронов. В общем случае траектория имеет сложный вид, но максимальную оценку можно получить, зная максимальное значение силы Лоренца, которая искривляет траекторию электронов.

Сила Лоренца определяет центростремительное ускорение:

$$ma = evB \sin(90^\circ)$$

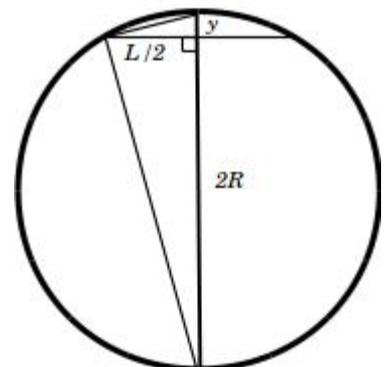
По 2-ому закону Ньютона:

$$m \frac{v^2}{R} = evB$$

Радиус кривизны орбиты:

$$R = \frac{mv}{eB}$$

Движение будет носить более сложный характер, чем движение по окружности, но оценить максимальное смещение можно, приняв, что магнитное поле искривляет



траекторию. А за радиус кривизны взять найденную величину R.

Из рис. видно, что два прямоугольных треугольника подобны, поэтому:

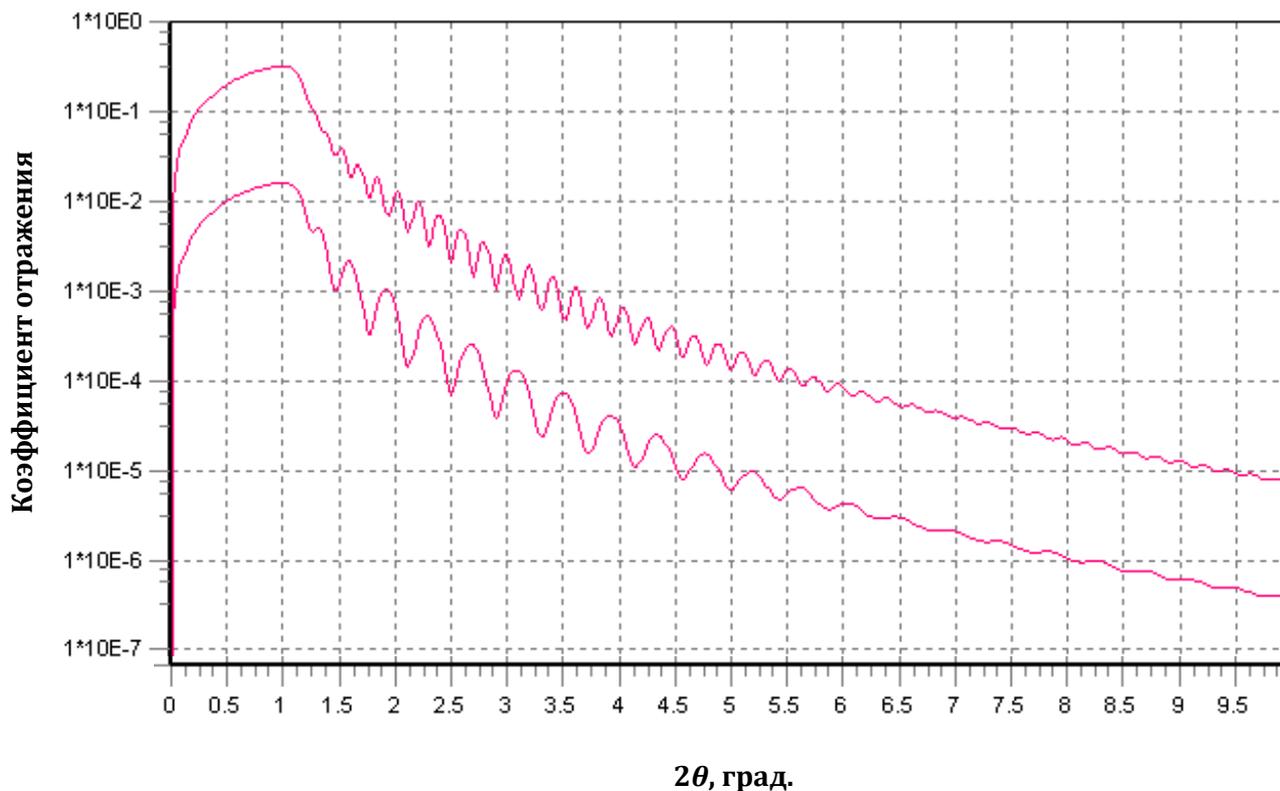
$$y = \frac{(L/2)^2}{2R} = \frac{\omega L^2}{8c} = \frac{3 \cdot 10^{10} \text{ рад} / \text{с} (10^{-7} \text{ м})^2}{8 \frac{3}{4} 10^8 \text{ м} / \text{с}} \approx 0,5 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 0,0005 \text{ нм} \ll L.$$

Где учтено, что амплитуда скорости при колебаниях:  $v = \frac{\omega \cdot L}{2}$

Таким малым смещением можно пренебречь.

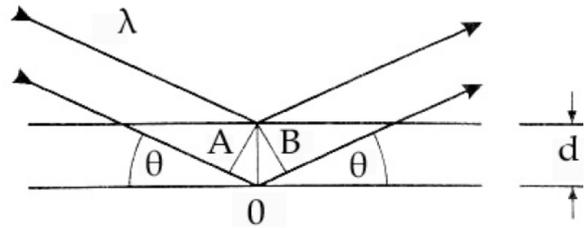
### Задача 7

Большая энергия (малая длина волны) квантов синхротронного излучения обуславливает его применение для определения толщины тонких пленок. На рисунке приведены угловые зависимости коэффициентов отражения синхротронного излучения для двух пленок различной толщины. Известно, что толщина более тонкой пленки равна 10 нм. Пользуясь графиками, оцените толщину второй пленки (**7 баллов**) и длину волны используемого излучения (**7 баллов**). Какова наименьшая толщина тонкой пленки, которую можно измерить с помощью такой методики? (**6 баллов**). При оценках учесть, что коэффициенты отражения отложены в зависимости от удвоенного угла между падающим излучением и поверхностью пленки, выраженного в градусах.



**Решение:**

Наблюдаемое на графиках чередование максимумов и минимумов коэффициента отражения вызвано интерференцией синхротронного излучения в тонкой пленке. Условие максимума интерференции можно определить, посчитав разность хода АОВ для двух параллельных лучей (см. рис.):



$$\Delta = 2d \sin \theta$$

Максимум в отражении будет наблюдаться при равенстве этой разности хода целому числу длин волн синхротронного излучения:

$$\Delta = n\lambda$$

Т.к. порядок интерференции  $n$  не известен, нужно рассмотреть два соседних максимума, для которых порядок будет отличаться на 1:

$$2d \sin \theta_1 = n\lambda$$

$$2d \sin \theta_2 = (n + 1)\lambda$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем:

$$2d (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = \lambda$$

Из последнего уравнения следует, что чем меньше толщина пленки  $d$ , тем больше период наблюдаемой интерференционной картины. Таким образом, более тонкой пленке соответствует нижний из приведенных графиков. Для более точной оценки периода лучше выбрать пики, отстоящие друг от друга на несколько порядков и совпадающие в максимуме с линиями сетки, например, пик при  $2\theta_1 = 3.5^\circ$  и пик при  $2\theta_2 = 7^\circ$ , разница между которыми составляет 8 порядков. Тогда период интерференционной картины для нижнего графика:

$$\Delta\theta = \frac{7/2 - 3.5/2}{8} \approx 0.22^\circ$$

Выберем теперь два произвольных соседних максимума и определим для них  $\theta_1$  и  $\theta_2$ : если  $\theta_1 = 1.75^\circ$ , то  $\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta = 1.97^\circ$ , откуда, подставляя известную толщину  $d_1 = 10$  нм, для длины волны синхротронного излучения получаем:

$$\lambda = 2d_1 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \approx 0.077 \text{ нм (ответ на второй вопрос)}$$

Аналогично оценим период интерференционной картины для второй пленки:

$$\Delta\theta = \frac{3/2 - 2/2}{5} \approx 0.1^\circ. \text{ Выберем } \theta'_1 = 1.5^\circ, \text{ тогда } \theta'_2 = 1.6^\circ, \text{ откуда ее толщина:}$$

$$d_2 = \frac{\lambda}{2(\sin \theta'_2 - \sin \theta'_1)} \approx 22 \text{ нм (ответ на первый вопрос)}$$

Для ответа на третий вопрос, считая длину волны фиксированной, в общем условии максимума интерференции:

$$2d \sin \theta = n\lambda$$

следует положить  $n = 1$  и, учитывая, что  $\sin \theta \leq 1$  (нормальное падение), получаем:

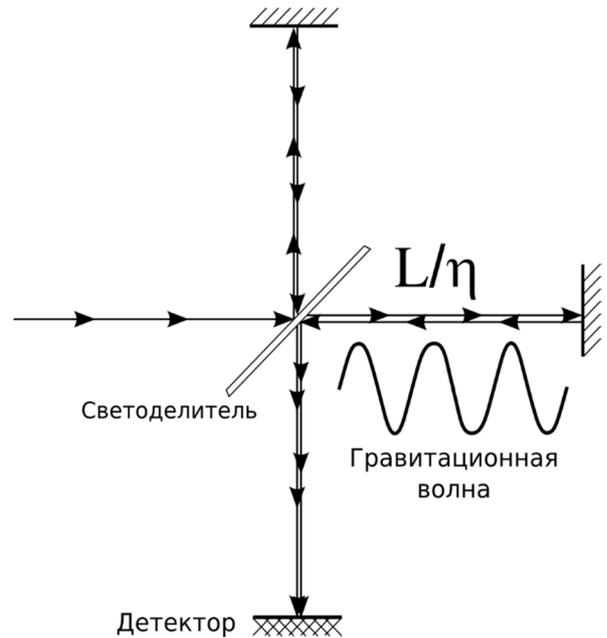
$$\frac{\lambda}{2d} \leq 1, \text{ откуда } d \geq \frac{\lambda}{2},$$

что в условиях данной задачи дает:  $d \geq 0.04$  нм.

Однако для более точной оценки следует учесть, что синхротронное излучение хорошо отражается только при малых углах  $\theta$ , что проявляется в быстром уменьшении коэффициента отражения с ростом  $\theta$  (см. график). Поэтому на практике диапазон доступных углов можно считать ограниченным значением  $2\theta_{max} \approx 10^\circ$ , т.е.  $\theta_{max} \approx 5^\circ \approx 0.09$  рад. Тогда  $\sin \theta \leq 0.09$ , откуда  $d \geq \frac{\lambda}{2 \cdot 0.09}$  или  $d_{min} = 5.5 \cdot \lambda \approx 0.4$  нм (ответ на третий вопрос).

### Задача 8

Для обнаружения гравитационных волн в Хэнфорде (США) учёные построили гигантский интерферометр Майкельсона с длиной плеч  $L = 4$  км. Луч света мощностью  $P = 40$  Вт с длиной волны  $\lambda = 1$  мкм разделяется с помощью светоделительной пластинки на два когерентных пучка, которые попадают на детектор с равными интенсивностями, но в противофазе. В момент регистрации гравитационной волны происходит искривление пространства-времени, в результате чего одно из плеч интерферометра укорачивается в  $\eta = 1 + 10^{-21}$  раз. Найдите интенсивность света на детекторе  $I$ , если известно, что лучи сфокусированы в световое пятно радиусом  $r = 1$  мкм.



### Решение:

Найдем разность хода двух волн:

$$\Delta = 2 \frac{1 - \eta}{\eta} L \approx 2(1 - \eta)L = 8 \cdot 10^{-18} \text{ м} \quad (1)$$

Теперь посчитаем разность фаз для двух волн:

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = 5 \cdot 10^{-11} \quad (2)$$

Интенсивность можно вычислить, пользуясь волновым представлением для пучков:

$$I(t) = I_0 \sin\left(\frac{2\pi c}{\lambda} t\right) - I_0 \sin\left(\frac{2\pi c}{\lambda} t + \Delta\phi\right) = 2I_0 \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda} t + \frac{\Delta\phi}{2}\right) \quad (3)$$

Отсюда:

$$I = I_0 \cdot \Delta\phi \quad (4)$$

Разность фаз, как видно, чрезвычайно мала, поэтому можно вычислить интенсивность приближённо:

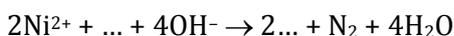
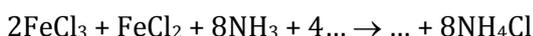
$$I = \frac{(P/2)\Delta\Phi}{\pi r^2} = \frac{\pi(1-\eta)LP}{\pi r^2\lambda} = \frac{42 \cdot 5 \cdot 10^{-11}}{10^{-12} \cdot 3.14} = 320 \text{ Вт/м}^2 \quad (5)$$

## Химия

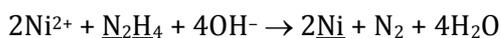
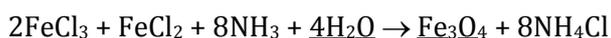
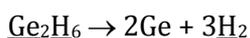
### Простые задачи

#### Задача 1

Ниже приведены уравнения реакций получения различных наночастиц. Все коэффициенты расставлены, для наночастиц приведены простейшие (брутто) формулы. Завершите эти уравнения, заполнив пропуски. В правой части каждого уравнения подчеркните формулу полученной наночастицы. **(8 баллов)**



**Решение:**



#### Задача 2

Сколько штук nanoалмазов диаметром 5 нм можно получить при взрыве 200 г нитроглицерина  $\text{C}_3\text{H}_5(\text{ONO}_2)_3$  при условии, что весь углерод превратится в алмазы? Плотность алмаза  $3.51 \text{ г/см}^3$ . **(8 баллов)**

*Ответ.*  $1.38 \cdot 10^{20}$ .

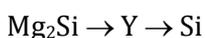
#### Задача 3

Октафторид фуллерена содержит 20.20 % фтора по массе. Сколько атомов углерода в молекуле фуллерена? **(8 баллов)**

*Ответ.* 50.

#### Задача 4

Напишите уравнения реакций, с помощью которых можно получать наночастицы. Определите неизвестные вещества. **(8 баллов)**.



Ответ. X – любая растворимая соль свинца, Y – SiH<sub>4</sub>.

### Задача 5

Реакция CO + NO в присутствии нанокластеров палладия протекает при 300 К, а в присутствии кристаллического палладия – с такой же скоростью при температуре 480 К. Используя уравнение Аррениуса

$$\ln k = \text{const} - \frac{E_a}{RT}$$

оцените, во сколько раз нанокластеры уменьшают энергию активации реакции по сравнению с кристаллами. **(8 баллов)**

Ответ. В 1.6 раза.

### Более сложные задачи

#### Задача 6. Розовое стекло

При сжигании серого вещества X, обладающего полупроводниковыми свойствами, в кислороде образуется белый кристаллический порошок Y, содержащий 28.83% кислорода по массе. Вещество Y растворили в воде, полученный раствор нейтрализовали раствором каустической соды. При добавлении к полученному раствору (вещества Z), подкисленному серной кислотой, раствора пероксида водорода образуется вещество K, способное при нагревании растворять золото.

Вещество Y используют при варке натриево-кальциевых силикатных стекол, окрашенных в розовый цвет. Известно, что их окраска обусловлена наночастицами, имеющими такой же качественный состав, что и X.

1. Определите все неизвестные вещества (подтвердите расчетом). **(6 баллов)**
2. Напишите уравнения всех упомянутых реакций. **(8 баллов)**
3. Объясните, чем обусловлена розовая окраска натрий-кальциевого стекла. **(2 балла)**
4. Почему изделия из такого стекла часто меняют окраску при выдувании? **(2 балла)**
5. Почему при введении X в свинцовые силикатные стекла розовой окраски не наблюдается? **(1 балл)**
6. Какое применение находит вещество X в копировальных аппаратах? **(1 балл)**

#### Решение:

1. Продуктом сгорания в кислороде является оксид, единственный продукт сгорания позволяет предположить, что вещество X – простое.  
Найдем формулу оксида X<sub>n</sub>O<sub>p</sub>.  
 $0,2883 = 16p/x$ , где  $p = 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4$ . При  $p = 2$ ,  $x = 79$ . Это селен, что соответствует продукту сгорания SeO<sub>2</sub>.
2.  $\text{SeO}_2 + \text{H}_2\text{O} = \text{H}_2\text{SeO}_3$ ,
3.  $\text{H}_2\text{SeO}_3 + 2\text{NaOH} = \text{Na}_2\text{SeO}_3 + 2\text{H}_2\text{O}$
4.  $\text{Na}_2\text{SeO}_3 + \text{H}_2\text{O}_2 = \text{Na}_2\text{SeO}_4 + \text{H}_2\text{O}$

5.  $\text{Na}_2\text{SeO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \leftrightarrow \text{H}_2\text{SeO}_4 + \text{Na}_2\text{SO}_4$
6. Окраска стекла обусловлена наночастицами селена
7. При повторной термообработке возможно укрупнение размера наночастиц, что приводит к изменению окраски.
8. В свинцовых стеклах селен связывается в устойчивый селенид свинца, который делает стекло коричневым.
9. Селен используется в копировальных аппаратах и принтерах. В основе электростатической фотографии лежит способность некоторых полупроводников уменьшать свое удельное сопротивление под действием света. Такие полупроводники называются фотопроводниками и используются для изготовления фоторецепторов. Таким фоторецептором и является селеновый барабан, находящийся в картридже (он представляет собой самый толстый вал в картридже). На фоторецептор подается заряд, а потом - изображение, которое в копировальных аппаратах освещается мощным источником света и проецируется через систему зеркал.

X – Se, Y –  $\text{SeO}_2$ , Z –  $\text{Na}_2\text{SeO}_3$ , K –  $\text{H}_2\text{SeO}_4$

### **Задача 7. Розовое стекло**

Сферические наночастицы из атомов золота размером от одного до нескольких сотен нанометров вызывают интерес исследователей с середины 19-ого века. Сегодня они используются в катализе, находят применение в медицине и различных нанотехнологиях.

Обычно наночастицы получают путем восстановления из солей золота в растворах, водных и неводных. В подобных опытах можно получать сферические частицы одинакового размера и менять этот размер по своему желанию. Вот одна из методик синтеза. К водному раствору  $\text{HAuCl}_4$  при комнатной температуре добавляют в избытке мягкий восстановитель, аскорбиновую кислоту и затем приливают водный раствор, в котором стабилизированы частицы самого золота,  $\text{Au}^0$ , с диаметром  $d_{\text{Au}^0} \approx 0.5$  нм. В результате получается коллоидный раствор, содержащий сферические частицы золота *одного* диаметра. Подбирая условия, можно менять этот диаметр,  $d_{\text{сч}}$  в диапазоне от 2 до 100 нм.

В отсутствие  $\text{Au}^0$  образование коллоидного раствора не происходит. Начальную молярную концентрацию атомов чистого золота в растворе после сливания обозначим как  $[\text{Au}^0]$ , а исходного соединения золота –  $[\text{HAuCl}_4]$ . В конце опыта  $\text{HAuCl}_4$  полностью восстановлено.

1. Почему в отсутствие  $\text{Au}^0$  коллоидный раствор не образовывался? Какова роль  $\text{Au}^0$ ? Если уменьшить  $[\text{Au}^0]$ , не меняя  $d_{\text{Au}^0}$  и  $[\text{HAuCl}_4]$ , увеличится или уменьшится размер сферических частиц? **(3 балла)**

2. Если аскорбиновую кислоту заменить на более сильный восстановитель, увеличится или уменьшится размер сферических частиц? Остальные параметры считаем постоянными. **(2 балла)**

3. Выведите формулу для расчета диаметра сферических частиц золота,  $d_{\text{сч}}$ . В формулу должны войти  $d_{\text{Au}^0}$ ,  $[\text{Au}^0]$  и  $[\text{HAuCl}_4]$ . Считайте, что в результате синтеза  $\text{HAuCl}_4$  и  $\text{Au}^0$  расходуются полностью. **(8 баллов)**

4. Оцените диаметр сферического кластера золота, содержащего 2016 атомов. Ваша оценка завышает или занижает диаметр? Радиус атома золота составляет  $1.74 \cdot 10^{-10}$  м.

Удельный вес золота равен 19 г/см<sup>3</sup>. Почему золотой нанокластер «плавает» в воде, а металлические частицы размером в несколько мм – тонут? Не нарушается ли здесь закон Архимеда? Объясните. (7 баллов)

**Решение:**

1. Восстановление золота Au<sup>+3</sup> происходит только на поверхности частиц золота Au<sup>0</sup>. В результате происходит рост сферической частицы, а концентрация сферических частиц, [Au<sub>n</sub>], не меняется в ходе опыта. Слабый восстановитель аскорбиновая кислота не способен восстановить Au<sup>+3</sup> в растворе и образовать сферические частицы. Частицы Au<sub>n</sub>, состоящие из Au<sup>0</sup>, – автокатализатор реакции восстановления. Если уменьшить [Au<sup>0</sup>], не меняя d<sub>Au<sup>0</sup></sub>, размер конечных сферических частиц увеличивается: уменьшается [Au<sub>n</sub>], а общее число атомов золота в них остается постоянным.

2. Происходит уменьшение размера кластеров. В этом случае возможно восстановление Au<sup>+3</sup> в растворе и образование дополнительных сферических частиц Au<sup>0</sup>. В конце опыта концентрация сферических частиц [Au<sub>n</sub>] больше, и, следовательно, их размер – меньше.

3. Общее число всех атомов золота в растворе после реакции не меняется, поэтому

$$[\text{Au}] = [\text{Au}^0] + [\text{HAuCl}_4],$$

где [Au] – концентрация атомов золота, входящих в состав полученных сферических частиц, других атомов золота в растворе нет. Число сферических частиц в начале и в конце опыта одинаково, поэтому

$$\frac{n_{\text{сч}}}{n_{\text{Au}^0}} = \frac{[\text{Au}]}{[\text{Au}^0]} = \frac{[\text{Au}^0] + [\text{HAuCl}_4]}{[\text{Au}^0]}$$

где n<sub>сч</sub>, n<sub>Au<sup>0</sup></sub> – количество атомов золота в исходной и конечной сферической частице. Считая, что диаметр наночастицы пропорционален кубическому корню из числа атомов в ней, находим:

$$\frac{d_{\text{сч}}}{d_{\text{Au}^0}} = \left( \frac{[\text{Au}^0] + [\text{HAuCl}_4]}{[\text{Au}^0]} \right)^{1/3}$$

Конечная формула:

$$d_{\text{сч}} = d_{\text{Au}^0} \left( \frac{[\text{Au}^0] + [\text{HAuCl}_4]}{[\text{Au}^0]} \right)^{1/3}$$

4. Объем и диаметр сферического кластера равны

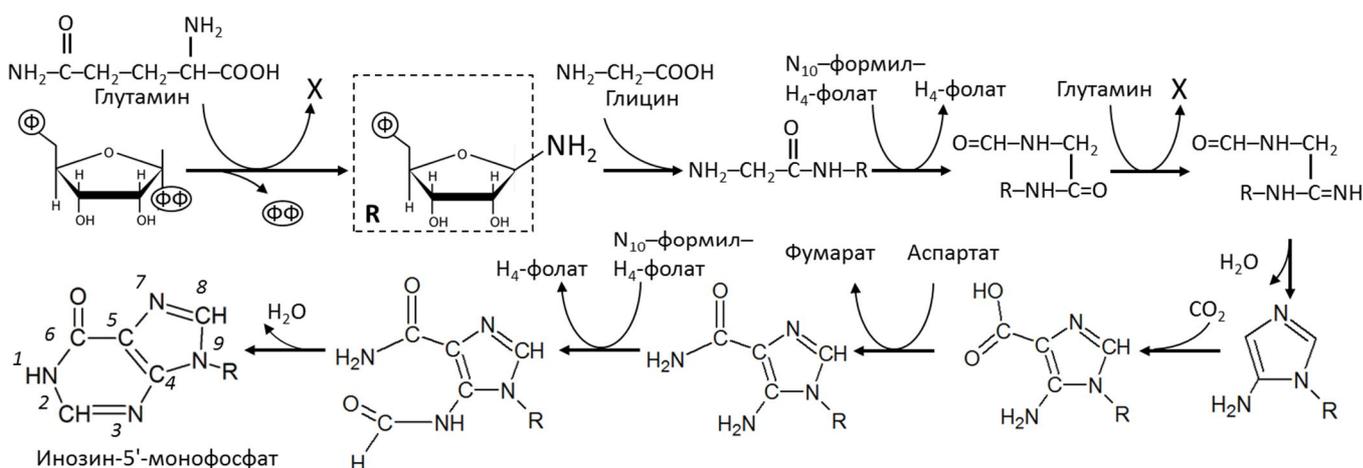
$$V_{\text{сч}} = n_{\text{сч}}V(\text{Au}^0) = 2016 \times \frac{4\pi}{3} (1.74 \times 10^{-10})^3 = 4.4 \times 10^{-26} \text{ м}^3$$

$$d_{\text{сч}} = \left( \frac{6 \times 4.4 \times 10^{-26} \text{ м}^3}{\pi} \right)^{1/3} = 4.4 \text{ нм}$$

Оценка – занижена, поскольку весь объем кластера отдан атомам золота и пустоты между атомами не учитываются. Это оценка размера снизу.

Нанокластер не тонет, потому что поверхностные атомы золота могут взаимодействовать с атомами жидкости. Доля поверхностных атомов в нанокластере велика и достаточна для стабилизации кластера в некоторых жидкостях. В более крупных частицах относительное количество поверхностных атомов значительно меньше. Подавляющее число атомов в крупной частице не соприкасается с жидкостью. Закон Архимеда рассматривает только выталкивающую силу и не предполагает наличия взаимодействий тела и жидкости.

### Задача 8. Нанобиохимия ДНК



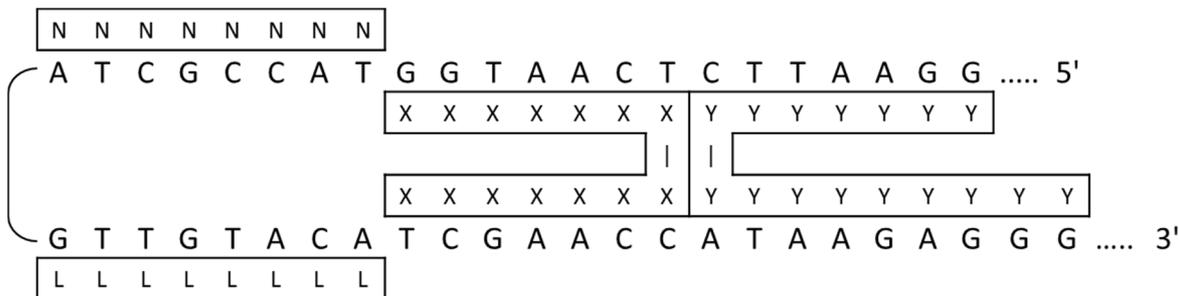
На рисунке изображена схема биосинтеза пуриновых нуклеотидов *de novo* в живой клетке. Атомы углерода конечного продукта (инозина), из которого в дальнейшем синтезируются пуриновые нуклеотиды, пронумерованы. R представляет собой рибозу-5'-фосфат, показанную в рамке; Φ – остаток фосфорной кислоты; ΦΦ – пиррофосфат.

- Какая аминокислота обозначена как X? Нарисуйте ее структурную формулу. **(2 балла)**
- Какие из перечисленных веществ могут обладать амфотерными свойствами? **(2 балла)**
  - пиррол; (б) никотиновая кислота; (в) пурин; (г) глутамин; (д) бензол
- Часто для анализа промежуточных продуктов биосинтеза используют радиоактивное мечение. При замене некоторых атомов на радиоактивные изотопы (например, <sup>14</sup>N на <sup>15</sup>N или <sup>12</sup>C на <sup>14</sup>C) биологические свойства молекул, как правило, не изменяются.
  - Какие атомы инозина будут изотопными, если для его синтеза использовали глутамин, аспарат и глицин, у которых все атомы углерода были заменены на изотопы <sup>14</sup>C? **(4 балла)**
  - Допустим, вы определили, что инозин содержит изотоп азота <sup>15</sup>N в 3-ем и 9-ом положении. Какое соединение могло стать донором этих азотов? **(4 балла)**
- Какие азотистые основания образуются из инозина? В состав каких нуклеиновых кислот они входят? **(2 балла)**

Технология ДНК-оригами позволяет создавать двухмерные и трехмерные конструкции из ДНК. Достигается это за счет того, что длинной одноцепочечной молекуле

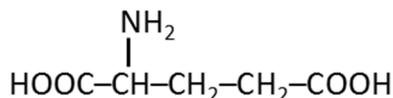
ДНК придают заданную форму с помощью «скрепок» – коротких комплементарных ДНК-олигонуклеотидов.

5. На рисунке вы видите изогнутую последовательность нуклеотидов, представляющую собой участок двумерной ДНК-конструкции, скрепленную четырьмя олигонуклеотидами, которые изображены в виде букв N, L, X и Y в рамках. Расшифруйте последовательность этих олигонуклеотидов таким образом, чтобы конструкция была устойчивой. Представьте их в виде 3'5'-последовательностей. **(6 баллов)**



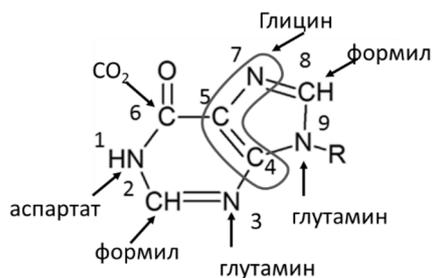
**Решение:**

1. X – это глутаминовая кислота (глутамат), отличающаяся от глутамина отсутствием одной NH<sub>2</sub> группы:



2. б, в, г

3.



а) Инозин будет содержать <sup>14</sup>C-атомы углерода в положениях 4 и 5.

б) Глутамин

4. Аденин и гуанин. Входят в состав ДНК.

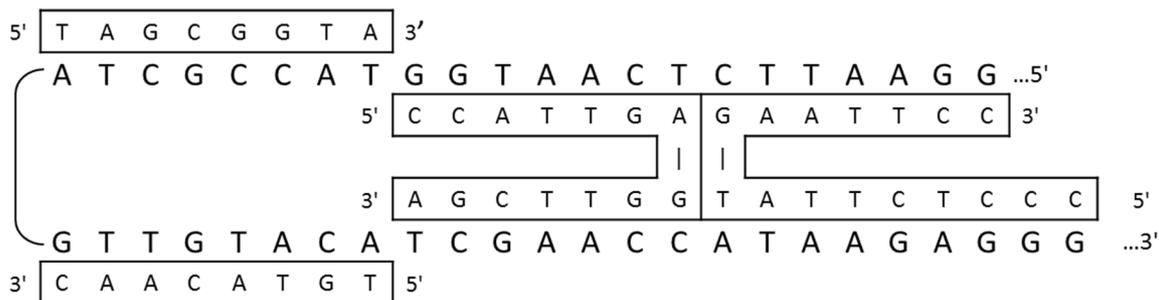
5.

а) Олигонуклеотид N: 3' ATGGCGAT 5'

б) Олигонуклеотид L: 3' CAACATGT 5'

в) Олигонуклеотид X: 3' AGCTTGG-AGTTACC 5'

г) Олигонуклеотид Y: 3' ССТТААГ-ТАТТСТССС 5'



## Отборочный (заочный) тур

### Юный эрудит

#### Задача 1. Как Энрико Ферми...

Когда знаменитый итальянский физик Энрико Ферми учился во втором классе, ему задали написать сочинение на тему: «Что делают из железа?». Мальчик по дороге в школу каждый день проходил мимо мастерской, где висела вывеска: «Здесь делают железные кровати». Поэтому он написал сочинение, состоящее из одной фразой:

**«Из железа делают некоторые кровати».**

Ферми выразился коротко и ясно. Он знал, что не все кровати делаются из железа! Учительница сначала поставила маленькому Энрико оценку «уно» (единица), но, потом прочла сочинение еще раз, посоветовалась с директором школы и переправила «уно» на «дъечи» (десять, лучшая оценка в итальянской школе).

Давайте, и мы постараемся быть лаконичными и точными, как Ферми.

1) Напишите, сочинение на тему: «Что можно сделать из углеродных нанотрубок?», ( Как Ферми, постарайтесь использовать как можно меньше слов и описать как можно больше применений).

2) Вставьте пропущенные слова

а) Некоторые врачи- \_\_\_\_\_ предлагают использовать наноалмазы для пломбирования \_\_\_\_\_

б) Наноалмазами покрывают некоторые обыкновенные \_\_\_\_\_ для \_\_\_\_\_ мяса.

в) Некоторые нанокластеры из золота или серебра являются \_\_\_\_\_.

г) Некоторые фуллерены добавляют в косметические препараты в качестве \_\_\_\_\_.

д) Внутри некоторых \_\_\_\_\_ можно поместить атомы редкоземельных металлов.

3) В чем разница между:

графеном и графаном, фуллереном и фуллеритом, нанометром и микросантиметром, агрегатом и агломератом? (Одна фраза на каждый ответ!).

#### Решение:

1) Из углеродных нанотрубок можно сделать некоторые: компоненты композиционных материалов (детали сенсоров, детали дисплеев, жаропрочные ткани, проводящие пленки, тросы космических лифтов – все это композиционные материалы) детали электронных приборов (это – отдельные трубки, полупроводниковые и проводящие), контейнеры для хранения активных молекул.

2)

а) Некоторые врачи- дантисты предлагают использовать наноалмазы для пломбирования зубов.

- b) Наноалмазами покрывают некоторые обыкновенные сковородки для жарки мяса.
  - c) Некоторые нанокластеры из золота или серебра являются катализаторами.
  - d) Некоторые фуллерены добавляют в косметические препараты в качестве антиоксидантами.
  - e) Внутри некоторых фуллеренов можно поместить атомы редкоземельных металлов.
- 3) Графан – это соединение графена с водородом, Фуллерит – кристалл, состоящий из молекул фуллерена; Нанометр – это одна десятая микросантиметра, Агрегат – это агломерат, в котором частицы слабо связаны между собой.

### ***Задача 2. Уникальный материал***

Этот уникальный материал содержит в своем составе более 95% воздуха, но является твердым. Он выдерживает на себе тело массой, в две тысячи раз превышающую свою. Из него планируют изготавливать скафандры. Назовите этот материал. Что произойдет, если скафандр целиком изготовленный из этого материала, нагреть до 2000°C и охладить? Какие вещества, встречающиеся в природе надо взять, чтобы полученная смесь содержала бы такие же атомы и в таком же количестве, как образец этого материала?

#### **Решение:**

Аэрогель, надо взять кварцевый песок и воздух. Образуется кварцевое стекло.

### ***Задача 3. Нанотехнологии в спорте***

Одна из важных областей деятельности человека – спорт. Нанотехнологии нашли широкое применение в производстве спортивного инвентаря, хотя и не привели к массовому крушению рекордов.

Ниже перечислены 5 видов спортивного инвентаря. Для каждого из них найдите информацию о том, а) какие наночастицы или наноматериалы используются для производства; б) какие свойства придают изделию эти частицы.

- 1) Ракетки для большого тенниса
- 2) Теннисные мячи
- 3) Ключки для гольфа
- 4) Смазка для лыж
- 5) Удочки

#### **Решение:**

1. В теннисных ракетках используют композитные материалы, содержащие углеродные нанотрубки. Они увеличивают прочность изделия, при этом делают его более легким.

2. Мячи покрывают наносиликатным покрытием («наноглина»), которое затрудняет диффузию газов через него и увеличивает срок жизни мячей.

3. Аналогично п. 1.

4. Для уменьшения трения к лыжной смазке добавляют наночастицы дисульфидов молибдена или вольфрама  $\text{MoS}_2$  и  $\text{WS}_2$ .

5. Аналогично п. 1.

#### **Задача 4. Бумага-суперконденсатор**



Шведские учёные изобрели новый материал, похожий на бумагу, который они использовали как гибкий конденсатор. В состав супербумаги входят наноцеллюлоза (отсюда и название материала) и проводящий полимер по обеим сторонам листа. Толщина листа супербумаги,  $d$ , оказалась равной 200 мкм. Авторы сообщают, что кружок бумаги диаметром 15 см имеет ёмкость  $C = 1\text{Ф}$ . Найдите диэлектрическую проницаемость супербумаги.

**Решение:**

По формуле плоского конденсатора:

$$\epsilon = \frac{C d}{S \epsilon_0} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{\pi (0.15/2)^2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} = 1.3 \cdot 10^9 \quad (1)$$

где  $S$  — площадь листа.

#### **Задача 5. Плавающие золотые нанокубики**

Для наночастиц отношение числа поверхностных атомов к их общему числу приближается к единице с уменьшением размера частицы. В таблице приведены соответствующие данные для золотых нанокубиков. Оцените минимальный размер золотого нанокубика, обладающего положительной плавучестью в ртути за счет удаления всех его внутренних атомов. Считайте, что форма нанокубика при этом не изменяется. Плотность золота  $19.3\text{ г/см}^3$ , ртути –  $13.6\text{ г/см}^3$ .

Сторона куба, нм	Доля поверхностных атомов от общего числа атомов
10	0.172
4.9	0.346
2.88	0.488
2.02	0.636
1.73	0.704
1.44	0.784
1.15	0.875
0.86	0.963

Оценка за задачу – 5 баллов

**Решение:**

Для обладания положительной плавучестью вещество должно иметь плотность меньшую, чем плотность жидкости, в которую оно погружено. Плотность золота изначально больше, чем плотность ртути, следовательно, золотые нанокубики будут тонуть в ртути. Однако после удаления внутренних атомов плотность нанокубиков пропорционально уменьшится, т.к. их объем при этом останется постоянным. Для выравнивания плотностей (нулевая плавучесть) необходимо уменьшить плотность золота в процентном соотношении на:

$$100 \% \cdot (19.3-13.6)/19.3 \approx 29.5 \%$$

Следовательно, для создания положительной плавучести у нанокубика необходимо, чтобы относительное число удаленных внутренних атомов превышало это значение. Долю внутренних атомов можно найти из таблицы вычитанием из единицы известных долей поверхностных атомов: наиболее близкое значение получаем для нанокубиков с размером 1.73 нм:  $100 \% \cdot (1-0.704) = 29.6 \%$ .

Следовательно, начиная с этого минимального размера плотность нанокубиков золота после удаления всех внутренних атомов будет меньше плотности ртути, что соответствует положительной плавучести в ней.

**Задача 6. Наногубка**



В Австралии учёные предложили новый материал для адсорбции нефти, разлитой в результате аварий и катастроф. Он представляет из себя «колоски» или «венички» (см. рисунок) из нитрида бора (BN). Такая структура имеет огромную площадь поверхности: один грамм «колосков» имеет площадь больше, чем у пяти теннисных кортов. Авторы

сообщают о том, что лист нитрида бора может адсорбировать нефти в 33 раза больше собственного веса. Рассчитайте пористость полученного материала (отношение объема пор к общему объему). Плотность нефти,  $\rho_{oil}$ , примите равной 0,85 кг/л, плотность нитрида бора найдите самостоятельно.

**Решение:**

Очевидно, что 1/34 по массе часть образца, адсорбировавшего нефть, будет состоять из нитрида бора с плотностью  $\rho_{BN}$ , 2,18 кг/л и 33/34 – из нефти. Теперь посчитаем пористость,  $p$ , выразив её через объемы нефти  $V_{oil}$  и нитрида бора  $V_{BN}$ .

$$p = \frac{V_{oil}}{V_{oil} + V_{BN}} = \frac{33/(34\rho_{oil})}{33/(34\rho_{oil}) + 1/(34\rho_{BN})} = \frac{1.14}{1.14 + 0.0135} = 98.8\% \quad (1)$$

**Задача 7. Гипертермия**

Известно, что повышение температуры тела (гипертермия) человека на 1-2°C является защитной функцией организма, состоящее к оказанию противодействия чужеродным микроорганизмам. Дальнейшее повышение температуры может привести к нежелательным последствиям для организма человека.

Для термодинамической терапии готовят водную суспензию серебряных наночастиц. Какой максимальной концентрации (в г/л) может быть раствор, чтобы нагретые на 5°C наночастицы не привели к нагреву воды более чем на 0,1°C? Необходимые для решения справочные данные найдите самостоятельно.

**Решение:**

Из уравнения теплового баланса:

$$c_{серебра} m_{серебра} \Delta T_{серебра} = c_{воды} m_{воды} \Delta T_{воды}$$

Суммарный объем складывается из объема воды и объема, занимаемого наночастицами:

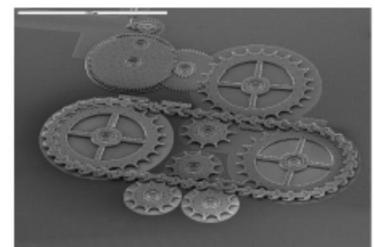
$$\frac{m_{серебра}}{\rho_{серебра}} + \frac{m_{воды}}{\rho_{воды}} = V$$

$$\frac{m_{серебра}}{V} = \frac{\rho_{серебра} c_{воды} \rho_{воды} \Delta T_{воды}}{c_{воды} \rho_{воды} \Delta T_{воды} + c_{серебра} \rho_{серебра} \Delta T_{серебра}} = \frac{10^4 \cdot 4,2 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 0,1}{4,2 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 0,1 + 0,24 \cdot 10^3 \cdot 10^4 \cdot 5} \approx 340 \text{ кг/м}^3$$

$$340 \text{ кг/м}^3 = 340 \text{ г/л}$$

**Задача 8. МЭМС шестерни**

На сегодняшний день электроника достигла нано размеров, а миниатюризация механических механизмов такими достижениями похвастаться не может. Но микроустройства уже существуют. Их планируют широко использовать в датчиках ускорений (акселерометрах), датчиках скоростей, анализаторах среды. Все эти микроэлектромеханические



системы имеют краткое название — МЭМС. Эти устройства объединяют в себе микроэлектронные и микромеханические компоненты. В лаборатории Sandia был создан самый маленький цепной механизм (см. рис). Радиус одной шестерни  $R_1 = 180$  мкм, а другой  $R_2 = 20$  мкм.

Найдите угловую скорость вращения маленькой шестеренки, если угловая скорость вращения большой  $\omega = 20$  об/мин. (4 балла)

**Решение:**

Поскольку проскальзывания нет, то постоянной является линейная скорость.

$$V_1 = V_2$$

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2, \text{ откуда}$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 R_1}{R_2} = 20 \text{ об/мин} \frac{180 \text{ мкм}}{20 \text{ мкм}} = 180 \text{ об/мин}$$

### *Задача 9. От ботаники до нанотехнологий*



Друзья, на картинках изображены растения. Назовите их, пожалуйста. У этих растений есть одно общее свойство, которое активно используется нанотехнологами в текстильной промышленности для создания непромокаемых тканей.

Вопросы:

1. По «имени» какого растения названо это природное явление?
2. На чем основано это явление? В чем его биологический смысл?

**Решение:**

На картинках изображены: аквилегия, настурция и тростник обыкновенный. Это свойство – супергидрофобность. Цветок по имени которого назван этот феномен – лотос, при попадании воды на его листья – они скатываются. Этот эффект возникает благодаря структуре листьев (все они в микроскопических выступках) и в восковом налете. Благодаря этому капли воды, попадая на листья, становятся шарообразной формы и скатываются с поверхности листа. Биологическая роль этого эффекта состоит в том, что после дождя

эффективней с поверхности листа смываются все вредные бактерии, грибы и вирусы, а также в том, что повышается коэффициент полезного действия фотосинтеза.

### **Задача 10. Искусственные цветы**

Такие цветы умеют выращивают химики в водных растворах.

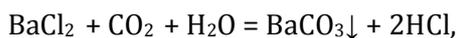
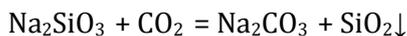


Это сделать совсем несложно. Для этого в воду, очищенную от растворенных газов, добавляют хлорид бария (4 г/л), силикат натрия (1 г/л), вносят в раствор алюминиевую и стеклянную пластинку и пропускают через раствор углекислый газ в течение нескольких часов. На пластинке растут кристаллы, форма которых зависит от кислотности раствора, количества добавленного углекислого газа, температуры. Напишите уравнения двух возможных реакций, которые протекают в таком растворе. Чему равна толщина стебля и размер бутона на каждом рисунке? Ответ дайте в нанометрах.

Оценка за задачу – 5 баллов

#### **Решение:**

Цветы состоят из осадков карбоната бария и диоксида кремния.



выделяющийся HCl теоретически может растворять карбонат бария, однако в этих экспериментах его нейтрализовывали добавлением небольшого количества щелочи.

Размер стебля и бутона на каждом рисунке можно оценить по масштабу (10 мкм = 10 тысяч нм)

D – стебель около 1 000 нм, бутон – 8 000 нм

E – стебель около 5 000 нм, бутон – 60 000 нм

F – стебель около 2 000 нм, бутон – 10 000 нм

Ответы в мкм не засчитывались.

### Задача 11. Загадка гнома

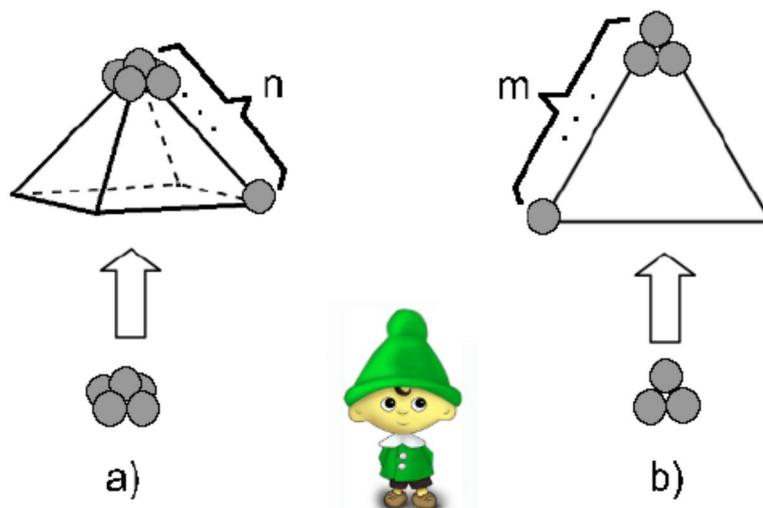


Рис. а) Кластер в форме квадратной пирамиды имеет  $n$  атомов металла на ребре (пример для  $n = 2$ ). б) Кластер в форме треугольника имеет  $m$  атомов меди на ребре (пример для  $m = 2$ ).

У маленького гномика было две одинаковых кучки атомов меди. Из первой он начал собирать кластер в виде квадратной пирамиды (рис. а), последовательно увеличивая ее размер, а из второй – в виде равностороннего треугольника (рис. б). В какой-то момент оказалось, что ни в первой, ни во второй кучках не осталось ни одного атома, но при этом оба кластера были построены без изъянов.

Найдите минимальное число атомов, которое могло быть в каждой кучке. Во сколько раз  $n$  отличается от  $m$ ? Кратко опишите ход своих рассуждений.

**Подсказка:** для решения задачи совсем не обязательно выводить сложные формулы, попробуйте, как и гномик, строить такие кластеры.

Оценка за задачу – 5 баллов

#### Решение:

Схема решения для младших школьников. В квадратной пирамиде число атомов в основании – это квадрат натурального числа, а основание треугольника – это натуральное число.

Атомами из первой кучки начнем последовательно «послойно» наращивать пирамиду (П). Одновременно из второй кучки будем пошагово увеличивать размер треугольника (Т) так, чтобы число атомов в треугольнике было не больше числа атомов в пирамиде.

Минимальному значению будет отвечать момент, когда числа атомов в кластерах впервые сравняются:

$$\text{П: } 1 + 2 \cdot 2 = 5; \text{ Т: } 1 + 2 = 3; 3 + 3 = 6 \quad (6 > 5)$$

$$\text{П: } 5 + 3 \cdot 3 = 14; \text{ Т: } 6 + 4 = 10, 10 + 5 = 15 \quad (15 > 14)$$

$$\text{П: } 14 + 4 \cdot 4 = 30; \text{ Т: } 15 + 6 = 21, 21 + 7 = 28, 28 + 8 = 36 \quad (36 > 30)$$

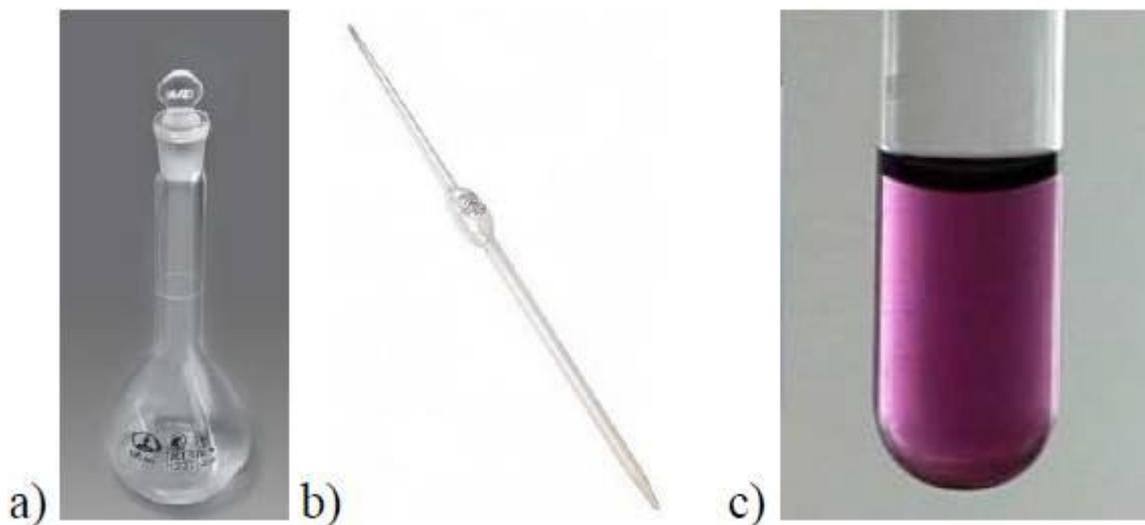
$$\text{П: } 30 + 5 \cdot 5 = 55; \text{ Т: } 36 + 9 = 45; 45 + 10 = 55 \quad (55 = 55)$$

Или

Атомов на ребре	Квадратная пирамида	Треугольник
2	$1 + 2 \cdot 2 = 5$	$1 + 2 = 3$
3	$5 + 3 \cdot 3 = 14$	$3 + 3 = 6$
4	$14 + 4 \cdot 4 = 30$	$6 + 4 = 10$
5	$30 + 5 \cdot 5 = 55$	$10 + 5 = 15$
6	$55 + 6 \cdot 6 = 91$	$15 + 6 = 21$
7		$21 + 7 = 28$
8		$28 + 8 = 36$
9		$36 + 9 = 45$
10		$45 + 10 = 55$
11		$55 + 11 = 66$

Значит, у гномика в каждой кучке было по 55 атомов, ребро квадратной пирамиды содержит 5 атомов, а треугольника – 10 (т.е., в два раза больше).

### Задача 12. Подготовка к эксперименту



Мерная колба с одной меткой (а) и пипетка с одной меткой (b) позволяют точно отмерить только номинальный объем; (с) раствор наночастиц золота.

Помогите юному нанотехнологу приготовить для важного эксперимента **6 мл** водного раствора наночастиц золота, в каждом миллилитре которого содержится **1 мкг** наночастиц, если имеются:

- 25 мл водного раствора, в каждом миллилитре которого содержится 5 мг наночастиц,
- 100 мл воды,
- одна мерная колба объемом 10 мл,
- две мерных колбы объемом 5 мл,
- пипетка объемом 3 мл.

Пошагово опишите все действия. Какие еще растворы (объем, масса наночастиц в одном миллилитре) у вас получатся в ходе подготовки к эксперименту?

Считать, что:

- можно использовать только имеющуюся посуду, хранить жидкости в пипетке нельзя;
- вся химическая посуда покрыта особым нанопокрытием, поэтому из нее можно вылить всю жидкость до последней капли;
- воду и исходный раствор наночастиц нельзя выливать обратно или «в раковину»;
- наночастицы золота равномерно распределяются по всему объему растворов.

**Подсказка:** приготовьте сначала раствор, каждый миллилитр которого содержит 1 мг наночастиц, а потом уже отмерьте от него 6 мл.

**Решение:**

Существует как минимум 4 способа решения данной задачи, далее приводятся некоторые из них.

Способ 1, с использованием подсказки.

1) Согласно подсказке, сначала надо приготовить раствор наночастиц золота с новым содержанием наночастиц.

Содержание НЧЗ «1 мг в мл» раствора (разбавленный, обозначим как «р-р2») отличается от содержания «5 мг в мл» (исходный раствор, обозначим как «р-р1») в 5 раз. Такого содержания можно достичь, увеличив объем раствора в 5 раз без увеличения количества наночастиц в нем. Данный процесс называется разбавление.

Если мы разбавим 1 мл «р-р1», то получим всего 5 мл «р-р2», что меньше требуемых в условии 6 мл, значит, для разбавления надо отобрать 2 мл «р-р1» (кроме того, на двукратное проведение процедуры разбавления нам может просто не хватить колб).

Как получить необходимые 2 мл? «2 это 5 минус 3»!

2) В первую колбу объемом 5 мл («5<sub>1</sub>») наливаем 5 мл «р-р1», затем переливаем отмеренный объем в колбу объемом 10 мл («10»);

3) из колбы «10» пипеткой отбираем 3 мл «р-р1» и переносим их в колбу «5<sub>1</sub>».

То есть, на этом шаге у нас 3 мл «р-р1» в колбе «5<sub>1</sub>» и 2 мл «р-р1» - в колбе «10».

В колбу «10» доливаем воду до общего объема 10 мл (то есть, к 2 мл раствора «5 мг в мл» добавляем 8 мл с нулевым содержанием наночастиц, в итоге получаем 10 мл раствора с содержанием наночастиц

$$\frac{2 \cdot 5\text{мг} + 0}{2\text{мл} + 8\text{мл}} = \frac{10\text{мг}}{10\text{мл}} = 1\text{ мг в мл,}$$

- то есть, «р-р2»).

5) Теперь, пользуясь оставшимися объемами химической «посуды», отольем из колбы «10» «мешающие» 4 мл «р-р2».

6) Вспоминаем про колбу «5<sub>1</sub>» и к имеющимся в ней 3 мл «р-р1» доливаем 2 мл «р-р2» из колбы «10». То есть, на этом шаге мы получаем 5 мл раствора с содержанием наночастиц

$$\frac{3 \cdot 5\text{мг} + 2 \cdot 1\text{мг}}{3\text{мл} + 2\text{мл}} = 3,4\text{мг}$$

в мл («р-р3») в колбе «5<sub>1</sub>» и 8 мл «р-ра2» в колбе «10».

7) Осталось отлить еще 2 мл «р-ра2». Снова пользуемся формулой «2 = 5 – 3». Берем вторую колбу объемом 5 мл («5<sub>2</sub>») и отливаем в нее 5 мл «р-ра2» из колбы «10» (то есть, в колбе «10» остается 3 мл «р-ра2»);

8) пипеткой отбираем 3 мл «р-ра2» из колбы «5<sub>2</sub>» и переносим их в колбу «10».

Итого у нас:

- в колбе объемом 10 мл («10») – требуемые 6 мл «р-ра2» (1 мг в мл);
- в первой колбе объемом 5 мл («5<sub>1</sub>») – 5 мл «р-ра3» (3,4 мг в мл);
- во второй колбе объемом 5 мл («5<sub>2</sub>») – 2 мл «р-ра2» (1 мг в мл).

Способ 2. подсказка не используется.

1) В первую колбу объемом 5 мл («5<sub>1</sub>») наливаем 5 мл «р-ра1».

2) Из колбы «5<sub>1</sub>» пипеткой отбираем 3 мл «р-ра1» и переносим их в колбу «5<sub>2</sub>», в колбе «5<sub>1</sub>» остается 2 мл «р-ра1».

3) В колбу «5<sub>1</sub>» доливаем воду до метки (плюс 3 мл, общий объем становится 5 мл). То есть, на этом шаге мы получаем 5 мл раствора с содержанием наночастиц

$$\frac{2 \cdot 5\text{мг} + 3 \cdot 0\text{мг}}{2\text{мл} + 3\text{мл}} = 2\text{мг}$$

в мл («р-р2») в колбе «5<sub>1</sub>».

4) Из колбы «5<sub>1</sub>» пипеткой отбираем 3 мл «р-ра2» и переносим их в колбу «10», в колбе «5<sub>1</sub>» остается 2 мл «р-ра2».

5) В колбу «10» доливаем при помощи пипетки 3 мл воды. То есть, на этом шаге мы получаем 6 мл раствора с содержанием наночастиц

$$\frac{3 \cdot 2\text{мг} + 3 \cdot 0\text{мг}}{3\text{мл} + 3\text{мл}} = 1\text{мг}$$

в мл («р-р3») в колбе «10».

Итого у нас:

- в колбе объемом 10 мл («10») – требуемые 6 мл «р-ра3» (1 мг в мл);
- в первой колбе объемом 5 мл («5<sub>1</sub>») – 2 мл «р-ра2» (2 мг в мл);
- во второй колбе объемом 5 мл («5<sub>2</sub>») – 3 мл «р-ра1» (5 мг в мл).

### Задача 13. Растягиваем белок

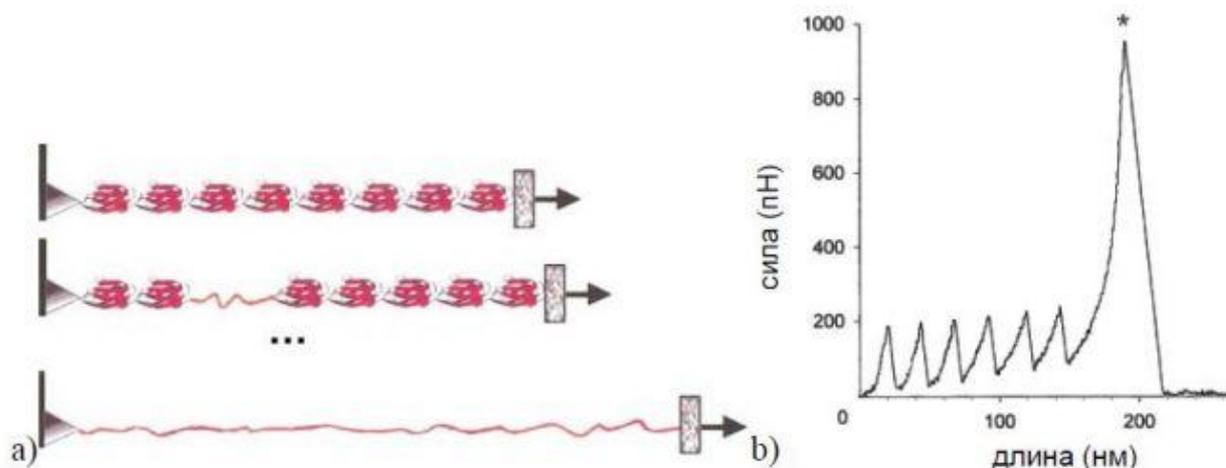


Рис. (а) Схематичный пример растягивания белка, состоящего из 8-ми одинаковых глобул-клубков. (б) График зависимости силы натяжения белка, состоящего из  $x$  глобул, от изменения его длины.

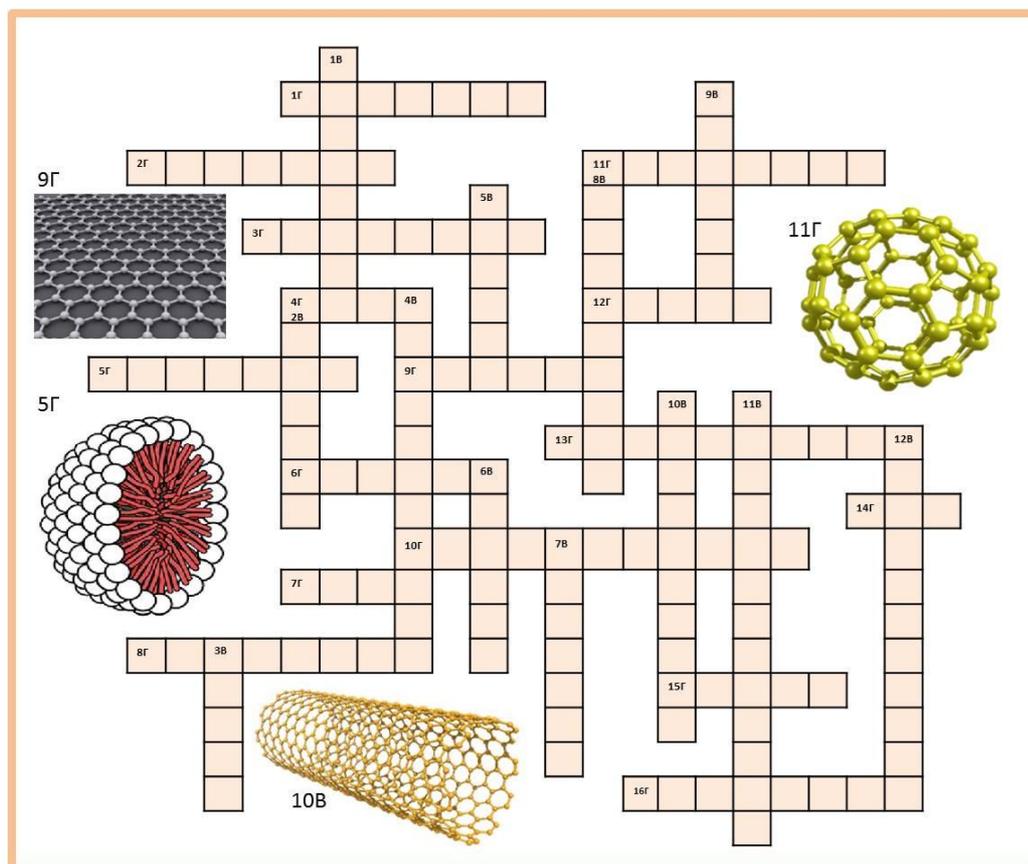
Если начать растягивать белок, состоящий из соединенных друг с другом одинаковых глобул-клубков, то при натяжении они начнут распутываться (рис. а), подобно тому, как развязываются скользящие узлы на веревке.

1. При растягивании такого белка, содержащего  $x$  глобул, измерялась сила натяжения при постепенном увеличении длины белка (график б). Определите  $x$ .
2. Оцените увеличение длины белка после «распутывания» одной глобулы.
3. Что происходит с белком в помеченной звездочкой точке на графике?

#### Решение:

1. Каждый пик (кроме последнего, самого большого) отвечает «распутыванию» одной глобулы-клубка. Значит, в белке содержится **6** глобул.
2. После «распутывания» последней глобулы общая длина белка увеличилась на  $\approx 150$  нм. Значит, распутывание одной глобулы приводит к увеличению длины на примерно  $150/6 = 25$  нм.
3. Белок отрывается от иглы атомно-силового микроскопа (допускался также ответ «разрывается»).

## Задача 14. Нанокроссворд биолого-химический



### По вертикали:

**1В.** Молекула или молекулярный комплекс на поверхности клетки, способные распознавать и связывать специфические химические группировки, молекулы или клетки и передавать сигнал внутрь клетки.

**2В.** Итальянский врач и ученый, лауреат Нобелевской премии по физиологии и медицине, который изобрел метод окрашивания отдельных нервов и клеток с помощью нитрата серебра.

**3В.** Шотландский ботаник, сделавший великое открытие, наблюдая за движением пыльцевых зерен в жидкости.

**4В.** Мембранная органелла, характерная для магнитотактических бактерий, содержащая монодоменные ферромагнитные кристаллы.

**5В.** Жидкая часть крови.

**6В.** Белковая оболочка вирусной частицы.

**7В.** Витамин группы А.

**8В.** Процесс превращения энергии видимого света в энергию химических связей.

**9В.** Химический элемент, из которого состоят загаданные слова 9Г, 11Г и 10В.

**10В.** см. рисунок

**11В.** Подавление действия одного аллеля другим того же гена.

**12В.** Энергетическая станция клетки.

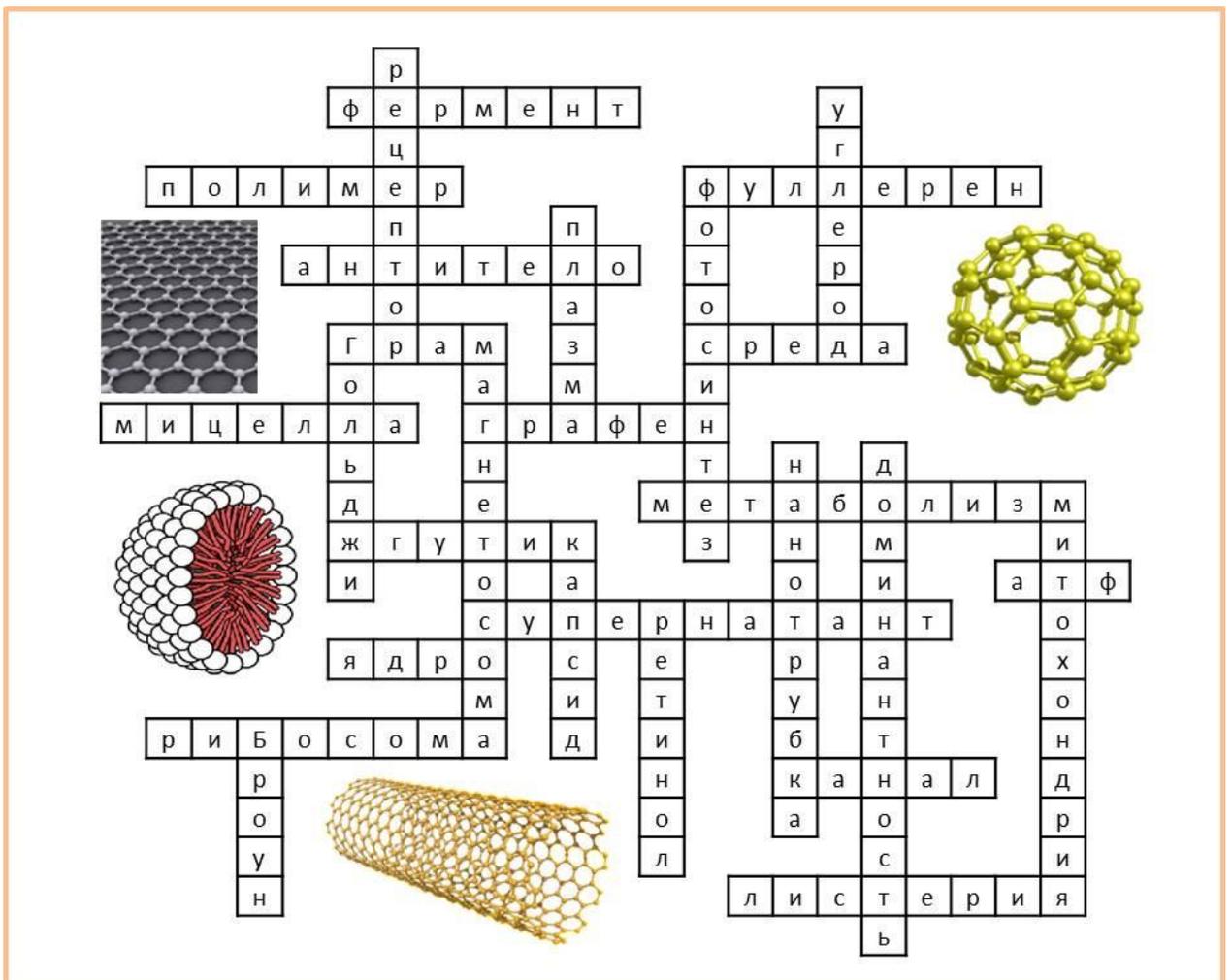
### По горизонтали:

**1Г.** Белковая молекула, реже молекула РНК или их комплекс, ускоряющие (катализирующие) химические реакции в живых системах.

**2Г.** Макромолекула, построенная из повторяющихся низкомолекулярных соединений, соединенных ковалентными связями.

- 3Г. Иммуноглобулин, синтезируемый В-лимфоцитами в организме животного в ответ на попадание в него чужеродного вещества и обладающий специфическим сродством к этому веществу.
- 4Г. Датский ученый, предложивший революционный метод окрашивания бактерий, который лег в основу их классификации.
- 5Г. см. рисунок
- 6Г. Поверхностная структура, присутствующая у многих прокариотических и эукариотических клеток и служащая для их движения в жидкой среде или по поверхности твердых сред.
- 7Г. Мембранная органелла эукариотических организмов, хранящая генетическую информацию.
- 8Г. Клеточная «машина», осуществляющая биосинтез белка.
- 9Г. см. рисунок
- 10Г. Надосадочная жидкость после центрифугирования.
- 11Г. см. рисунок
- 12Г. Питательная жидкость для культивирования клеток.
- 13Г. Обмен веществ.
- 14Г. Единая энергетическая валюта организма.
- 15Г. Сложноорганизованная пора в мембранах клетки и клеточных органелл.
- 16Г. Грамположительная внутриклеточная бактерия, названная в честь английского врача, создателя хирургической антисептики.

**Решение:**



## Задача 15. Нанокроссворд с картинками



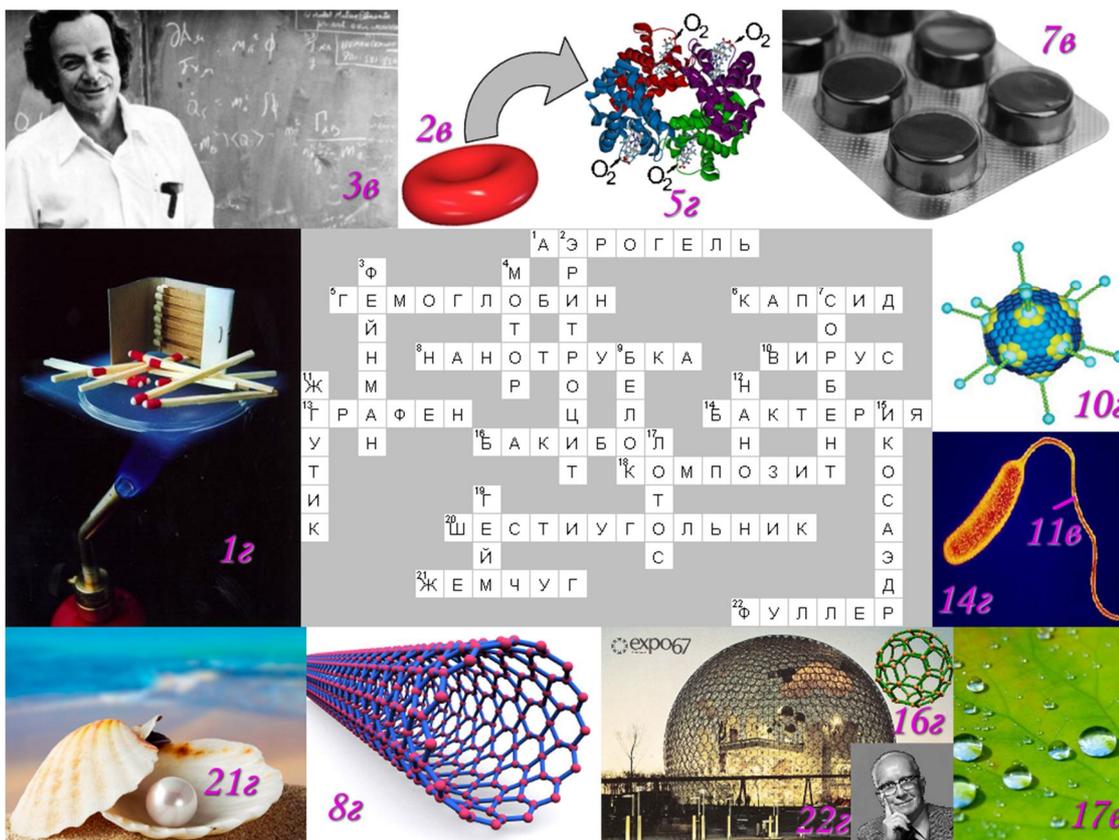
### По горизонтали:

1. сверхлегкая защита от жара (рис. 1г)
5. переносчик кислорода (рис. 5г)
6. оболочка 10г
8. рис. 8г
10. патоген на рис. 10г
13. двумерный материал, который можно получить разрезанием 8г
14. микроорганизм на рис. 14г
16. одно из названий молекулы (рис. 16г)
18. непростой материал, например 21г
20. общий геометрический элемент для 8г, 16г и 13г
21. рис. 21г
22. автор архитектурного сооружения (рис. 22г)

### По вертикали:

2. рис. 2в
3. автор фразы «там, внизу, много места» (рис. 3в)
4. молекулярный ... приводит в действие 11в
7. Активированный уголь (рис. 7в) используется как ...
9. 5г – это ...
11. рис. 11в
12.  $10^{-9}$
15. геометрическая форма 6г, при усечении вершин дает форму 16г
17. его название носит эффект (рис. 17в)
19. он получил Нобелевскую премию за исследование материала 13г

### Решение:



**По горизонтали:**

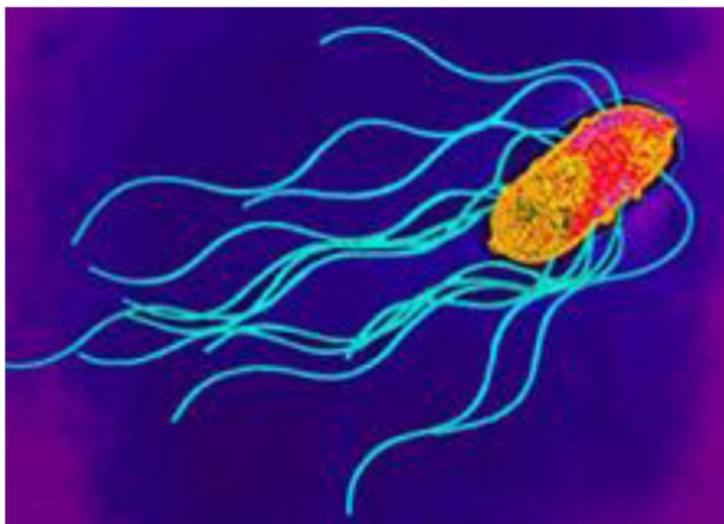
1. Аэрогель – сверхлегкая защита от жара (рис. 1г)
5. Гемоглобин – переносчик кислорода (рис. 5г)
6. Капсид – оболочка 10г
8. Нанотрубка – рис. 8г
10. Вирус – патоген на рис. 10г
13. Графен – двумерный материал, который можно получить разрезанием 8г
14. Бактерия – микроорганизм на рис. 14г
16. Бакибол – одно из названий молекулы (рис. 16г)
18. Композит – непростой материал, например 21г
20. Шестиугольник – общий геометрический элемент для 8г, 16г и 13г
21. Жемчуг – рис. 21г
22. Фуллер – автор архитектурного сооружения (рис. 22г)

**По вертикали:**

2. Эритроцит – рис. 2в
3. Фейнман – автор фразы «там, внизу, много места» (рис. 3в)
4. молекулярный мотор приводит в действие 11в
7. Активированный уголь (рис. 7в) используется как сорбент
9. 5г – это белок
11. Жгутик – рис. 11в
12. Нано –  $10^{-9}$
15. Икосаэдр – геометрическая форма 6г, при усечении вершин дает форму 16г
17. Лотос – его название носит эффект (рис. 17в)
19. Гейм – получил Нобелевскую премию за исследование материала 13г

## Задача 16. Передвижение бактерий

В научной работе огромное количество времени уходит на чтение различных текстов: научных статей, монографий, учебников, руководств к приборам и т.д. И каждый раз очень важно отделить важное от неважного и уметь выделить главное. Вашему вниманию предлагается научно-популярный текст. В конце текста есть несколько вопросов. Постарайтесь внимательно ответить на эти вопросы, используя только материал прочитанного текста.



Бактерии способны передвигаться в жидкости, используя много механизмов, таких как жгутики, изменения поверхностного натяжения, изменения плавучести, полимеризацию актина, который окружает их, и множество еще неизвестных механизмов. Бактериальные жгутики отличаются от жгутиков эукариот. Жгутики прокариот и эукариот принципиально различаются: бактериальный жгутик имеет толщину 10—20 нм и длину 3—15 мкм, он пассивно вращается расположенным в мембране мотором; жгутики же эукариот толщиной до 200 нм и длиной до 200 мкм, они могут самостоятельно изгибаться по всей длине. Жгутик бактерий состоит из трех частей: филамента (собственно нити), крюка и базального тела. Каждая из этих частей сложена из белков. Белки, образующие филамент, называются флагеллинами (от латинского слова *flagellum* — жгутик). Флагеллины складываются в нить, которая с помощью крюка крепится к базальному телу. Базальное тело прочно закорено в клеточной оболочке и может свободно вращаться по или против часовой стрелки. Базальное тело преобразует химическую энергию в работу, вращаясь за счёт градиента концентрации протонов, таким образом, являясь трансмембранным мотором. Например, для *Escherichia coli* (кишечной палочки) на один оборот жгутика требуется перемещение около 1000 протонов, при этом скорость вращения одного жгутика около 2400 об./мин. Плавание — это самый быстрый способ передвижения. Скорость движения бактерий при помощи жгутиков составляет от 20 до 200 мкм/с (для штаммов *Escherichia coli*, имеющих жгутик, — 30 мкм/с). Бактерии, не использующие жгутик при передвижении, таких скоростей развить не могут. Например, скорость движения *Cytophaga-FlexibacterBacteriodes* порядка 2—4 мкм/с. У *Mycoplasma mobile* она достигает 4,5 мкм/с, у нитчатых синезеленых водорослей (цианобактерий) 10 мкм/с. А скорость *Mycoplasma gallisepticum* — всего 0,1 мкм/с. У некоторых бактерий жгутики расположены по всей поверхности клеточной стенки (например, у бактерий рода *Proteus*), такие бактерии известны как перитрихи [от греч. *peri* - вокруг, *trichos* - волос]. Некоторые бактерии снабжены только одним толстым жгутиком (например, представители рода *Vibrio*), они известны как монотрихи. Политрихи —

бактерии, имеющие одиночный по виду жгутик, образованный пучком из 2-50 жгутиков (например, у кишечной палочки, как правило, 5 жгутиков). Бактерия может менять направление движения, изменяя направление вращения базального тела: вращение базального тела по часовой стрелке толкает клетку в направлении от жгутика, а биения против часовой стрелки тянут клетку вслед за жгутиком. Изменение направления движения сопровождается тамблингом (дрожанием), во время которого бактерия некоторое время не совершает поступательных движений. Как мы видим, бактериальные жгутики – это удивительные по строению и свойствам аппараты. Как это часто бывает, ученые черпают свое вдохновение у природы, что является основой такого направления в науке как бионика. Так, жгутики бактерий вдохновили швейцарско-японский коллектив ученых на создание некоторого аналога бактериального жгутика с держателем на конце, способного транспортировать лекарственные препараты внутри организма. Благодаря использованию прямой лазерной записи изображения (DLS) на поверхности фоторезиста (полимерного фоточувствительного материала), с последующим удалением неполимеризованных участков и нанесением слоев никеля и титана методом нанесения из газовой фазы (PVD), авторам удалось получить хорошо воспроизводимые "наноштопоры" необходимой формы. В отличие от бактериальных жгутиков, которые перемещают бактерию из области с меньшей концентрацией питательных веществ в область с большей концентрацией, движущей силой для полученных "наноштопоров" является внешнее магнитное поле – статическое и вращающееся, причем в случае статического поля направление движения существенно зависит от угла подъема винтовой линии "наноштопора" (практически сонаправлено при угле подъема 45 градусов и практически перпендикулярно при 75 градусах). В случае приложения переменного поля ситуация несколько сложнее. При низких частотах наблюдается так называемое дрожание (тамблинг). Тамблинг также характерен для бактерий, когда им необходимо поменять направление своего движения, и занимает около 0,1 с. При увеличении частоты внешнего поля возникает момент, индуцирующий винтовое движение. Для наглядной демонстрации транспортных возможностей предложенного "наноштопора", авторами был проведен очень красивый эксперимент. В начале штопор,двигающийся в деионизированной воде, захватывает микрошарик полистирола (диаметром 6 мкм), который затем толкает по заданному маршруту, причем на пути следования штопора находится существенная ступенька. Несмотря на это препятствие, груз остается в держателе и по достижении цели высвобождается простым изменением направления движения штопора.

#### **Вопросы к тексту:**

- 1) Какие механизмы передвижения бактерий упомянуты в тексте? (несколько вариантов ответа)
  - а) с помощью жгутиков
  - б) скольжением
  - в) изменением поверхностного натяжения
  - г) реактивным движением
  - д) с помощью полимеризации актина
- 2) Во сколько раз скорость передвижения самой быстрой жгутиковой бактерии больше, чем скорость передвижения самой медленной безжгутиковой?
  - а) в 2 раза
  - б) в 20 раз
  - г) в 200 раз
  - д) в 2000 раз

- 3) К какому направлению науки можно отнести разработку швейцарско-японского коллектива ученых?
- к нанотехнологиям
  - к биотехнологиям
  - к бионике
  - к электронике
- 4) При каких значениях переменного магнитного поля созданный учеными «наноштопор» переставал направленно двигаться?
- при низких
  - при высоких
  - при частотах ниже 140 Гц
  - ни при каких
- 5) Почему белок, образующий филамент жгутика, называется флагеллин?
- 6) Какие бактерии легко принять за растения?
- 7) Для каких целей ученые создали «наноштопор»?
- 8) Как исследователи собираются контролировать движение созданного аппарата?
- 9) Кишечная палочка проделала путь 30 мкм в жидкой среде в одном направлении, после чего поменяла направление на противоположное и продвинулась еще на 90 мкм. Учитывая материал текста, ответьте на вопросы. Сколько времени она затратила на весь процесс? Сколько протонов было потрачено на движение?
- 10) Какие выражения истинны (И), какие ложны (Л), какие не указаны (НУ) в тексте. При затруднениях – вновь обратитесь к тексту.
- Существует множество механизмов перемещения бактерий, однако скольжение – наиболее загадочный тип перемещения бактерий.
  - Скорость движения бактерий при помощи жгутиков для разных бактерий может отличаться на порядок.
  - представители рода *Vibrio* обладают 1 жгутиком, представляющим собой пучок из 5-6 более мелких жгутиков.
  - В экспериментах по управлению движением искусственного «наноштопора» использовали статическое и вращающееся магнитное поле.
  - Высвобождение «груза», который переносит «наноштопор», происходит за счет изменения направления его движения.
- 11) Творческое задание. Отвлечемся, наконец, от текста и подумаем. На какие еще изобретения может вдохновить нас природа? Предложите свою идею (идеи).
- Оценка за задание – 11 баллов

**Решение:**

- а, в, д
- д
- в
- а

- Потому что слово происходит от латинского *flagellum* – жгутик.
- Цианобактерии (об этом говорит само название - синезеленые водоросли).
- Для транспортировки лекарственных препаратов внутри организма.
- С помощью магнитного поля.
- 

Дано: скорость движения 30 мкм/с  
 На 1 оборот уходит 1000 протонов (N)  
 количество жгутиков (L) – 5 штук

$t_T$  (тамблинга) – 0,1 с

скорость вращения жгутика ( $V$ ) =  $[2400 \text{ (об/мин)} / 60 \text{ (с/мин)}] = 40 \text{ об/с}$

Решение:

1)  $S=30+90 = 120 \text{ (мкм)}$  – путь кишечной палочки

2)  $t=120 \text{ (мкм)} / 30 \text{ (мкм/с)} = 4 \text{ (с)}$  – время движения

3)  $t_{\text{общее}} = t+t_T = 4 + 0,1 = 4,1 \text{ (с)}$  – время, затраченное на весь процесс с учетом тамблинга

4)  $V*t*L*N = 40 \text{ об/с} * 4 \text{ (с)} * 5 \text{ (жгутиков)} * 1000 \text{ (протонов/об)} = 800\,000 \text{ (протонов)}$  – было потрачено на движение.

Ответ: было потрачено 4,1 с и 800000 протонов.

**10)**

а) НУ

б) И

в) Л

г) И

д) И

### Задача 17. Филворд

Ф	Л	А	Г	Е	Л	Л	И	Н	К
К	Т	А	П	Д	Т	О	С	Н	О
К	А	Л	А	Л	И	П	У	У	Н
О	К	А	М	Ё	Б	А	О	К	Ъ
К	С	И	Р	Г	О	Щ	Е	Л	Ю
К	И	М	У	Р	Е	И	Н	Е	Г
И	С	Й	Т	У	Г	Х	Б	О	А
М	В	О	Ц	И	С	Т	А	И	Ц
А	Л	Е	Н	Л	И	Ч	Ь	Д	И
Ж	Л	Е	В	Е	Н	Г	У	К	Я

Перед вами филворд на определенную тему. Каждая буква может входить в состав только одного слова. Слова в этом филворде располагаются либо по вертикали, либо по горизонтали. Они не пересекаются, не «ломаются», но могут соприкасаться друг с другом.

**В филворде зашифрованы следующие слова:**

1. белок, входящий в состав жгутиков.
2. шаровидные клетки.
3. направленное движение клеток по градиенту концентрации эффекторов.
4. пептидогликан.
5. временная форма существования микроорганизмов при попадании в неблагоприятные условия.
6. форма хранения генетического материала прокариот.
7. процесс переноса части генетического материала при непосредственном контакте двух клеток.
8. фамилия ученого.

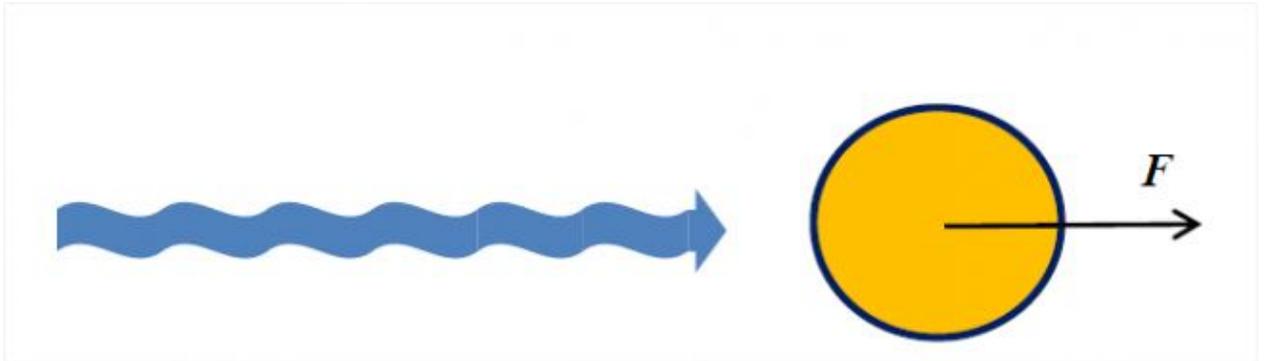
Все слова филворда связаны между собой. Однако есть одно лишнее слово. Запишите его. Почему оно лишнее?

**Решение:**

Ф	Л	А	Г	Е	Л	Л	И	Н	К
К	Т	А	П	Д	Т	О	С	Н	О
К	А	Л	А	Л	И	П	У	У	Н
О	К	А	М	Ё	Б	А	О	К	Ъ
К	С	И	Р	Г	О	Щ	Е	Л	Ю
К	И	М	У	Р	Е	И	Н	Е	Г
И	С	Й	Т	У	Г	Х	Б	О	А
М	В	О	Ц	И	С	Т	А	И	Ц
А	Л	Е	Н	Л	И	Ч	Ь	Д	И
Ж	Л	Е	В	Е	Н	Г	У	К	Я

## Физика

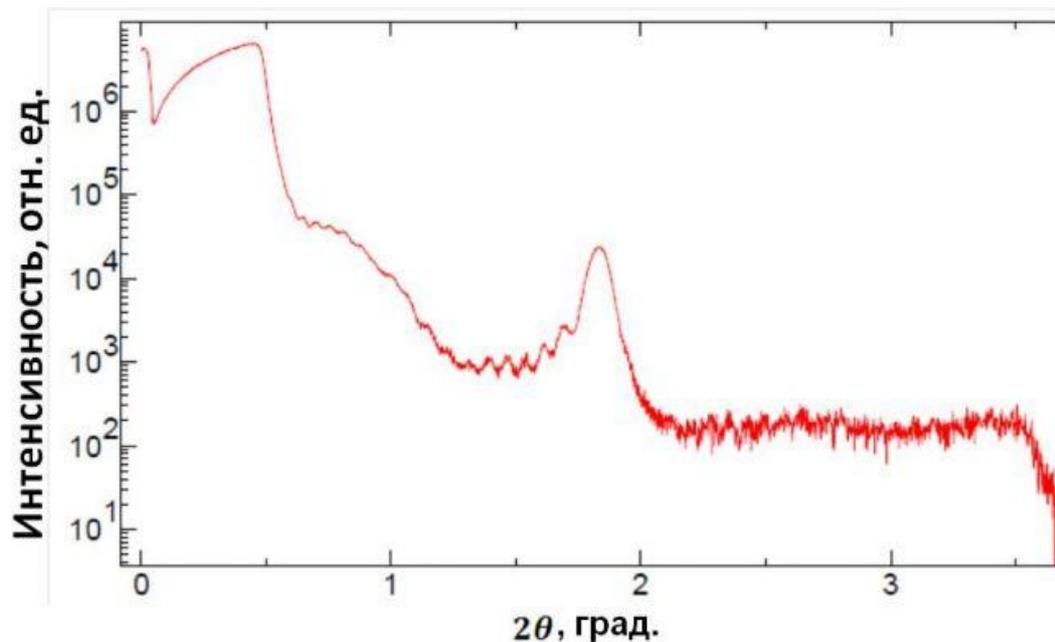
### Задача 1. Давление света на наночастицу



Как известно, первые опыты по измерению светового давления были осуществлены П.Н.Лебедевым в 1899 году с использованием крутильных весов. Какое среднее давление  $P_{\text{ср}}$  оказывает монохроматический свет с интенсивностью  $I = 1 \text{ Вт/см}^2$  на наночастицу диаметром  $d = 5 \text{ нм}$ , если его эффективное сечение поглощения составляет  $\sigma = 10^{-14} \text{ см}^2$ ? (5 баллов).

Во сколько раз  $k$  это давление отличается от давления света той же интенсивности на идеально зеркальную поверхность при его нормальном падении? (2 балла).

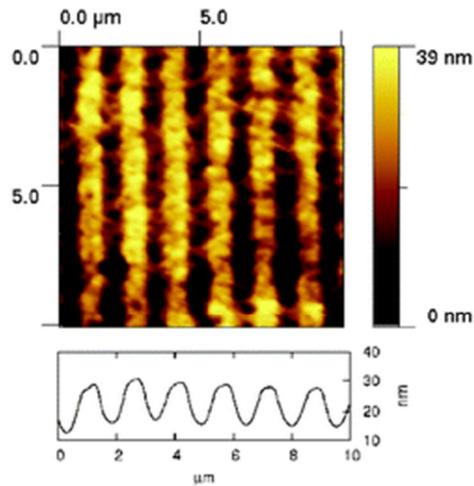
### Задача 2. Дифракция рентгеновских лучей на многослойной пленке



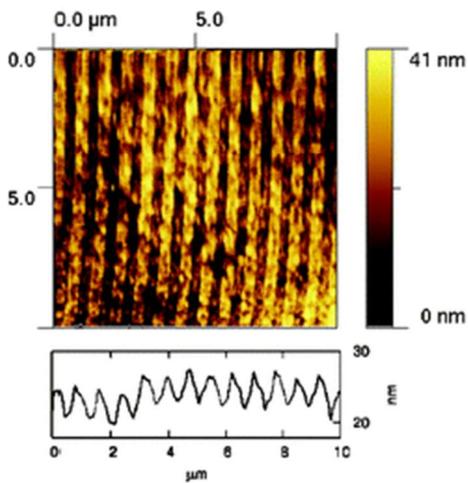
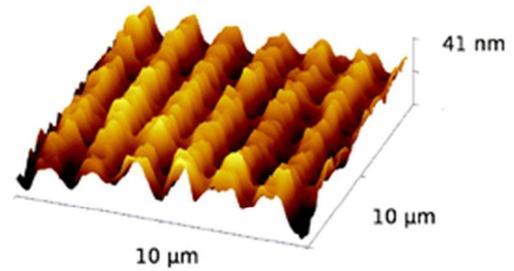
На рисунке приведена картина дифракции рентгеновских лучей от многослойной пленки, осажденной на подложку, причем известно, что при осаждении чередовались слои двух различных составов. Длина волны рентгеновских лучей составляла  $1.54 \text{ \AA}$ , а по оси  $x$  отложен удвоенный брэгговский угол  $2\theta$ . Какую информацию о пленке можно извлечь из представленного скана? (3 балла).

Пользуясь графиком, оцените основные параметры пленки в нанометрах (7 баллов).

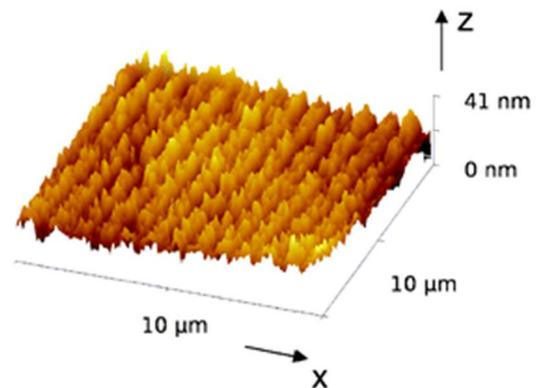
### Задача 3. Нанорельеф



CD



DVD



На изображении представлены результаты исследования поверхности компакт диска (CD) и DVD методом атомно-силовой микроскопии. По данным этих исследований определите расстояние между дорожками и глубину (**1 балл**).

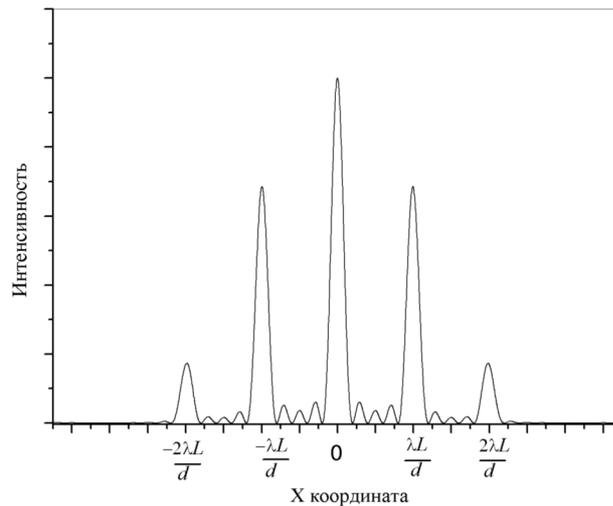
Какую картину будет наблюдать ученик в отраженном свете на экране, если он посветит на поверхность дисков лазерной указкой? Угол падения считайте близким к 0, длина волны излучения  $\lambda = 630$  нм. Расстояние от диска до экрана 1 м. Схематически изобразите зависимость интенсивности от координаты (**5 баллов**).

**Решение:**

**CD:** Расстояние между дорожками определяем из графика профиля поверхности CD:

$$d_1 = (8-2)/4 = 1,5 \text{ мкм}$$

Глубина дорожек:  $\Delta h \approx 10$  нм.



CD и DVD диски представляют из себя дифракционные решетки с периодами  $d_1$  и  $d_2$ . Условие наблюдения главных максимумов:  $d \sin(\varphi) = m \lambda$ , где  $d$  период решетки,  $\varphi$  — угол наблюдения,  $m$  — порядок максимума,  $\lambda$  — длина волны. Поскольку синус не может быть больше 1, то в случае CD диска максимальное число пиков равно 5 (по 2 пика 1 и 2 порядка и 1 нулевого).

Расстояние от центрального максимума можно выразить как:

$$X = L \sin(\varphi) = (m \lambda L) / d$$

Для 1 пика  $X = \lambda L / d = 0,63 \text{ мкм} \cdot 1 \text{ м} / 1,5 \text{ мкм} = 0,42 \text{ м}$ , для второго  $X = 2 \lambda L / d = 0,84 \text{ м}$

Более точная формула:

$$X = L \operatorname{tg}(\varphi) = L \frac{m \lambda}{\sqrt{d^2 - (m \lambda)^2}},$$

которая для пика 1-ого порядка дает:

$$X = L \frac{\lambda}{\sqrt{d^2 - \lambda^2}} \approx 0,46 \text{ м},$$

для 2-ого:

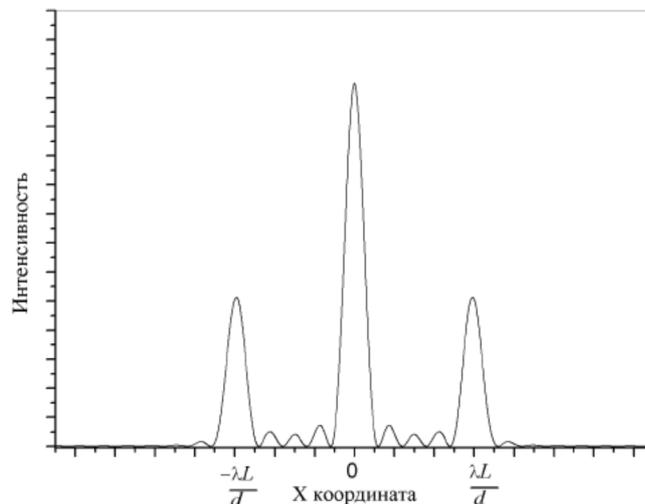
$$X = L \frac{2 \lambda}{\sqrt{d^2 - (m \lambda)^2}} \approx 1,54 \text{ м}.$$

**DVD:**  $d_2 = (9-2)/8 = 7/8 = 0,875 \text{ мкм}$  Глубина дорожек:  $\Delta h \approx 5 \text{ нм}$  Поскольку период меньше, то отношение  $\lambda/d$  становится близким к 1. С трудом можно наблюдать главные максимумы 1-ого порядка. Всего 3 (центральный + 2).

Для пика от DVD  $X = \lambda L / d = 0,63 \text{ мкм} \cdot 1 \text{ м} / 0,875 \text{ мкм} = 0,72 \text{ м}$

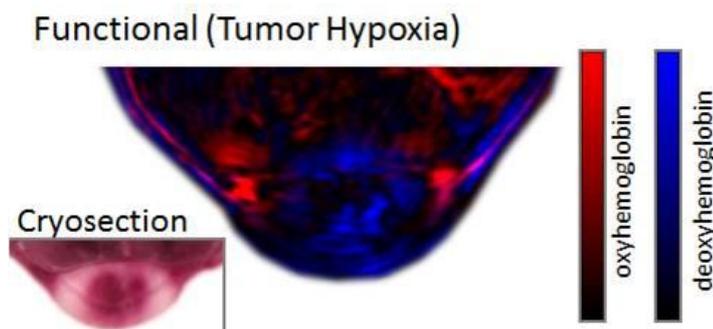
Точное выражение:

$$X = L \frac{\lambda}{\sqrt{d^2 - \lambda^2}} \approx 1,03 \text{ м}$$



#### Задача 4. Оптоакустическая спектроскопия

Современный метод оптоакустической спектроскопии позволяет определить состав некоторых жидкостей (например, крови), опираясь на спектральные отличия оптического поглощения компонентов. В частности, отличие спектров поглощения гемоглобина (белка, переносящего кислород в организме) в окисленной и неокисленной форме позволяет рассчитать концентрацию кислорода в крови без вмешательства в организм пациента (см. рис.) Метод использует эффект теплового расширения тел, которые эффективно поглощают свет, что, в свою очередь, приводит к испусканию ультразвуковой волны, если интенсивность света изменяется по периодическому закону (т. е. свет «модулирован»). Измеряя интенсивность ультразвука в разных точках при помощи матрицы микрофонов, учёные восстанавливают 3D-изображение биологических объектов.



Томографическое изображение распределения кислорода в раковой опухоли. Красный — окисленный гемоглобин, синий — неокисленный. В углу — фотография самой опухоли. (Radiology, 2012)

Юная изобретательница Даниэла разработала новое контрастное вещество, которое представляет из себя наночастицы с высоким показателем поглощения света  $\alpha = 100 \text{ см}^{-1}$  и плотностью  $2 \text{ г/см}^3$ . Она приготовила водную суспензию наночастиц с концентрацией  $C_{\text{НР}} = 1 \text{ г/л}$  и направила на неё источник световых прямоугольных импульсов с интенсивностью  $I_0 = 1 \text{ кВт/м}^2$ , частотой  $f = 1 \text{ МГц}$  и скважностью 2 (так называемые, меандры).

1. Найдите звуковое давление ультразвуковой волны (**10 баллов**). Сжимаемость воды принять равной  $5 \times 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ , а коэффициент объёмного расширения воды  $1.5 \times 10^{-4} \text{ К}^{-1}$ .
2. Насколько отличается уровень давления звука, испускаемого суспензией, от звука разговора Даниэлы и её научного руководителя (50 дБ) (**4 балла**)?

**Решение:**

Предположим, что кювета с образцом много тоньше характерной длины поглощения света суспензией. Тогда интенсивность поглощения  $I$  в слое толщиной  $L$  будет равно:

$$I = \alpha \gamma I_0 L \quad (1)$$

Где  $\gamma$  — объёмная доля наночастиц в суспензии. Далее находим мощность  $W$  выделяемую в объёме  $V$ :

$$W = \alpha \gamma I_0 V \quad (2)$$

Теперь найдём скорость нагрева жидкости. Для этого мощность поделим на теплоёмкость воды  $C_0 = 4,2 \text{ кДж/кг} \cdot \text{К}$ :

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\alpha \gamma I_0}{C_0 \rho_w} \quad (3)$$

Здесь учтена плотность воды. Посчитаем абсолютный нагрев за один период (для простоты положим, что нагрев осуществляется импульсами, равными половине периода):

$$\Delta T = \frac{\alpha \gamma I_0}{C_0 \rho_w \cdot 2 \cdot f} \quad (4)$$

Теперь нужно перейти от изменения температуры к изменению давления. Для этого запишем выражения для коэффициента сжимаемости жидкости:

$$\beta_p = \frac{-dV}{V} \frac{1}{dP} \quad (5)$$

И для коэффициента теплового расширения:

$$\beta_T = \frac{-dV}{V} \frac{1}{dT} \quad (6)$$

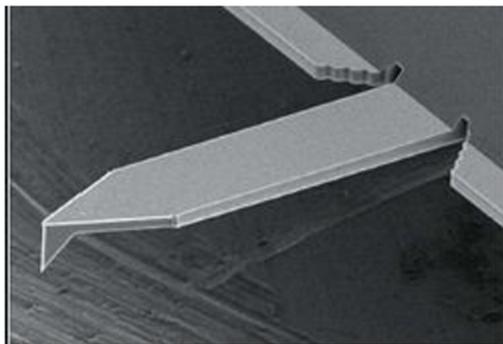
Учитывая оба коэффициента, получаем выражение для давления:

$$\Delta P = \frac{\beta_T}{\beta_p} \frac{\alpha \gamma I_0}{C_0 \rho_w \cdot 2 \cdot f} = \frac{1.5 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-10}} \frac{10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 1}{4200 \cdot 2 \cdot 10^6} = 180 \text{ мкПа} \quad (7)$$

Что соответствует примерно 10 дБ, т. к. это в 10 раз больше опорного давления 20 мкПа, которое соответствует 0 дБ. Таким образом, разница в уровнях звукового давления составит 40 дБ.

### Задача 5. Потенциал взаимодействия

В атомно-силовой микроскопии (АСМ) используют зондовые датчики, которые представляют собой упругую консоль с острым зондом на конце.



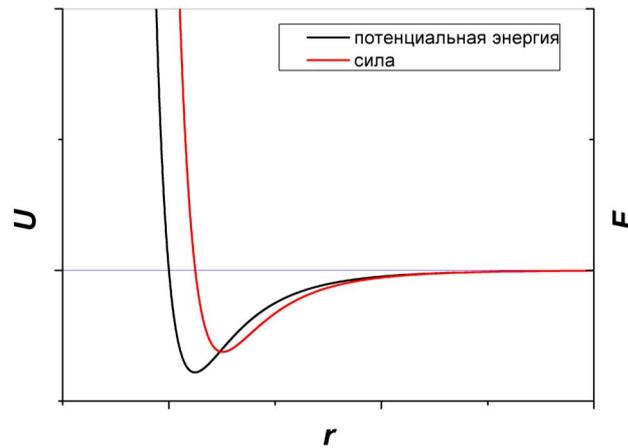
Можно считать, что энергия взаимодействия зонда с поверхностью описывается функцией

$$U(r) = U_0 \left( -\left(\frac{a}{r}\right)^6 + \left(\frac{\sqrt{2}a}{r}\right)^{12} \right)$$

где  $r$  – расстояние до поверхности.

1. Представьте графически зависимость потенциальной энергии от расстояния. **(1 балл)**
2. Известно, что минимум потенциальной энергии достигается при  $r_{min} = 1 \text{ \AA}$ . Найдите  $a$ . **(2 балла)**
3. Найдите минимальное значение потенциальной энергии, если известно, что максимальная сила притяжения, действующая между зондом и поверхностью,  $F_{max} = 10^{-9} \text{ Н}$ . **(5 баллов)**.

**Решение:**



$$U(r) = U_0 \left( -\left(\frac{a}{r}\right)^6 + \left(\frac{\sqrt{2}a}{r}\right)^{12} \right)$$

Потенциальная сила связана с потенциальной энергией выражением:  $\vec{F} = -\text{grad}U$

$$F_r(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} = -U_0 \left( \left(\frac{6a^6}{r^7}\right) - \left(\frac{12(\sqrt{2}a)^{12}}{r^{13}}\right) \right)$$

Экстремум этой функции можно найти посчитав производную  $F_r(r)$ .

$$\frac{\partial F_r}{\partial r} = -U_0 \left( -\left(\frac{42a^6}{r^8}\right) + \left(\frac{156(\sqrt{2}a)^{12}}{r^{14}}\right) \right)$$

Минимум потенциальной энергии достигается при

$$\frac{-\partial U}{\partial r} = 0,$$

откуда можно выразить расстояние при котором минимальна потенциальная энергия, а сила равна 0. Изэтого условия получаем:

$$r_{\min} = \sqrt[6]{2} \cdot 2a \quad . \quad a = \frac{r_{\min}}{\sqrt[6]{2} \cdot 2} \approx 0,45 \text{ \AA}$$

Максимальная сила притяжения при

$$\frac{\partial F_r}{\partial r} = 0$$

Это условие позволяет выразить расстояние при котором сила притяжения максимальна

$$r_{\max F} = \sqrt[6]{\frac{13}{7}} \cdot r_{\min} = \sqrt[6]{\frac{26}{7}} \cdot 2a$$

Подставляя это значение в выражение для  $F_r(r)$  получаем  $U_0$ .

$$U_0 = \frac{-F_{\max}}{\left(\frac{6a^6}{r_{\max F}^7}\right) - \frac{12(\sqrt{2}a)^{12}}{r_{\max F}^{13}}} = \frac{-13}{36} \left(\frac{26}{7}\right)^{\frac{7}{6}} 2^7 \cdot F_{\max} a \approx 9,6 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$$

Следует иметь ввиду, что сила притяжения имеет отрицательную проекцию на радиус-вектор, поэтому  $U_0$  величина положительная.

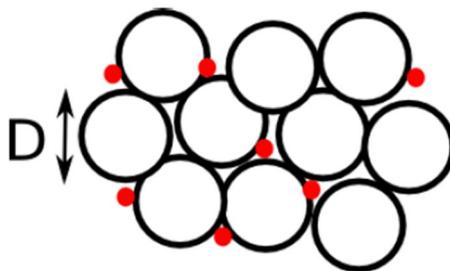
Теперь можно выразить значение минимальной потенциальной энергии:

$$U_{min} = U_0 \left( - \left( \frac{a}{r_{min}} \right)^6 + \left( \frac{\sqrt{2}a}{r_{min}} \right)^{12} \right) = \frac{U_0}{2^7} \left( -1 + \frac{1}{2} \right) \approx \frac{13}{72} \left( \frac{26}{7} \right)^{\frac{7}{6}} \cdot F_{max} \cdot a = \frac{169}{504} \sqrt[6]{\frac{13}{7}} r_{min} \cdot F_{max}$$

$$U_{min} \approx -3,8 \cdot 10^{-20} \text{ Дж} \approx -0,23 \text{ эВ}$$

### Задача 6. Нанорубины

Любительницы ювелирных украшений особенно ценят рубины – драгоценные камни, представляющие собой кристаллы корунда ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) с примесью хрома (Cr), который и придаёт характерную красную окраску минералу.



Российские учёные предложили новый способ формирования рубинов. Сначала они осадили нанокристаллы  $\text{Al}_2\text{O}_3$  диаметра  $D$  на подложку, получив тем самым плотный, но пористый наноструктурированный слой (пористость образца  $P$  составила 50%). Затем они применили метод атомно-слоевого осаждения хрома из газовой фазы. Преимуществом данного метода является исключительная точность нанесения покрытия, он позволяет наносить покрытия толщиной от 10 пикометров (при этом расстояние между атомами в корунде — 0.5 нм). Исследователи получили искусственный «пористый рубин» такого же цвета, как и природный образец, в котором концентрация атомов хрома составляла 1%.

1. Рассчитайте диаметр нанокристаллов, если известно, что покрытие поверхности атомами хрома составило 5% от монослоя **(6 баллов)**.
2. Рассчитайте площадь удельной поверхности материала в  $\text{м}^2/\text{см}^3$  **(2 балла)**.
3. Какие оптические свойства «пористого рубина» изменятся, если поры заполнить водой **(1 балл)**?
4. Как можно интерпретировать покрытие поверхности кристалла слоем в 10 пикометров **(1 балл)**?

Для простоты решётку корунда можно считать кубической с одним атомом в элементарной ячейке.

#### Решение:

Рассчитаем сначала поверхность образца в единице объёма. Объём одного нанокристалла  $\rho D^3/6$ . Поскольку пористость 50%, то на один нанокристалл приходится объём  $\rho D^3/3$ . При этом площадь нанокристалла  $\rho D^2$ . Отсюда, удельная площадь поверхности  $S$  равна:  $3/D$ . Количество приповерхностных атомов  $3/D/s$ , где  $s = 0.25 \text{ нм}^2$ . Тогда концентрация атомов

хрома равна  $(0.05 \cdot 3)/(D \cdot s)$ , которая с другой стороны равна  $0.01/s/a$ , где  $a = 0.5$  нм — межатомное расстояние. Отсюда находим  $D = a \cdot 0.05 \cdot 3 / 0.01 = 7.5$  нм.

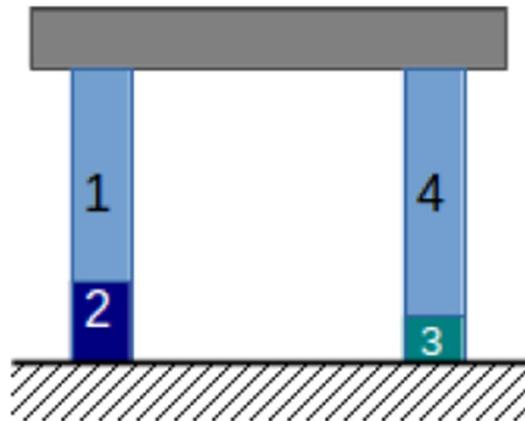
Удельная площадь поверхности в этом случае будет равна:  $3 / D = 0.5 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1} = 500 \text{ м}^2/\text{см}^3$ .

При наполнении пор водой увеличится показатель преломления материала.

Если толщина покрытия меньше межатомного расстояния, то считается, что покрыта только часть монослоя, пропорциональная их отношению.

### Задача 7. Тепловое расширение

Хорошо известно, что при нагревании тела расширяются. Оказывается, что это свойство тел представляет большую сложность при конструировании зондовых микроскопов. Оцените, на сколько увеличится длина алюминиевого стержня, при увеличении температуры на  $1^\circ\text{C}$  (**2 балла**). Длина стержня при  $0^\circ\text{C}$  равна 1 см.



В мастерской по ремонту зондовых микроскопов столкнулись со следующей задачей: подобрать материал с нужным коэффициентом теплового расширения. Дело в том, что для столика микроскопа нужно изготовить две подставки в виде цилиндрических стержней, но для компенсации тепловых расширений стержни делают не монолитными, а составляют из 2-х стержней одинакового сечения, необходимой длины. Для левой подставки взяли стержень длины  $l_1$ , с коэффициентом теплового расширения  $\alpha_1$ , а вторую часть – из материала с коэффициентом теплового расширения  $\alpha_2$  и длины  $l_2$ . Для правой подставки стержня с коэффициентом теплового расширения  $\alpha_1$ , такой же длины, как слева, не оказалось, но нашёлся длины  $l_4$ . С каким коэффициентом теплового расширения  $\alpha_3$  нужно подобрать материал для правой подставки, чтобы при любом нагреве подставка микроскопа оставалась горизонтальной? (**6 баллов**). При  $0^\circ\text{C}$  высота левой и правой подставок одинаковы.

**Решение:**

Для алюминиевого стержня получаем:  $\Delta l = l_0 \alpha_{\text{алюм}} \Delta t = 10^{-2} \text{ м} \cdot 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1} \cdot 1 \text{ К} = 220 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 220 \text{ нм}$

Удлинение стержней:  $l_1 = l_{01}(1 + \alpha_1 \Delta t)$ ,  $l_2 = l_{02}(1 + \alpha_2 \Delta t)$ ,  $l_3 = l_{03}(1 + \alpha_3 \Delta t)$

По условию сумма длин 1 и 2 равна сумме длин 3 и 4 при любом изменении  $t$ :

$$l_{01}(1+\alpha_1\Delta t)+l_{02}(1+\alpha_2\Delta t)=l_{03}(1+\alpha_3\Delta t)+l_{04}(1+\alpha_1\Delta t)$$

$$l_{01}+l_{01}\cdot\alpha_1\Delta t+l_{02}+l_{02}\cdot\alpha_2\Delta t=l_{03}+l_{03}\cdot\alpha_3\Delta t+l_{04}+l_{04}\cdot\alpha_1\Delta t, \text{ т. к. } l_{01}+l_{02}=l_{03}+l_{04}, \text{ то}$$

$$l_{01}\cdot\alpha_1+l_{02}\cdot\alpha_2=l_{03}\cdot\alpha_3+l_{04}\cdot\alpha_1, \text{ с учётом } l_{01}=l-l_{02}, \text{ а}$$

$$l_{04}=l-l_{03}, \text{ где } l \text{ суммарная исходная длина при } 0^\circ \text{ С.}$$

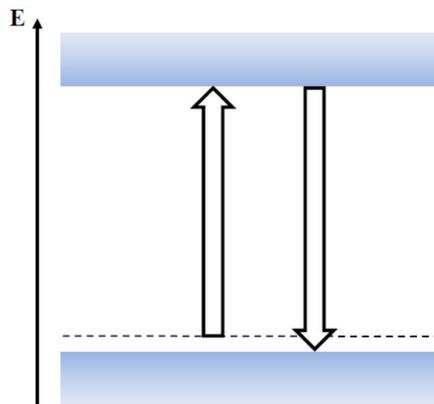
$$\text{Окончательно получаем: } l_{02}\cdot(\alpha_2-\alpha_1)=l_{03}\cdot(\alpha_3-\alpha_1)$$

$$\alpha_3 = l_{02} / l_{03} \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1$$

$$\text{Можно } \alpha_3 = ((l_{01} - l_{04}) \cdot \alpha_1 + l_{02} \cdot \alpha_2) / l_{03}$$

### Задача 8. Лазерное антистоксовое охлаждение

Неупругое рассеяние лазерного излучения веществом может быть использовано для его охлаждения – этот метод получил название лазерного антистоксового охлаждения. Метод основан на том, что поглощаемые и испускаемые затем фотоны имеют различную энергию.



За какое время  $\Delta t$  нанокристалл кремния радиусом  $r = 25$  нм охладится на  $\Delta T = 1^\circ$  под воздействием направленных на него встречных лучей лазера с длиной волны  $\lambda = 325$  нм и суммарной интенсивностью  $I = 41$  Вт/см<sup>2</sup>, если известно, что энергия оптического фонона в кремнии  $E_{\text{фон}} = 65$  мэВ. Считать, что вероятность поглощения фотонов нанокристаллами составляет  $p = 0.1$  % и процесс происходит при температуре, близкой к комнатной (7 баллов).

**Решение:**

Суть метода в том, что энергия поглощенного фотона оказывается меньше энергии испущенного на величину, равную энергии кванта тепловых колебаний – фононов. Посчитаем число поглощенных нанокристаллом кремния фотонов света за время  $\Delta t$ :

$$n = \frac{p}{100} \frac{IS\Delta t\lambda}{hc}$$

где  $S = \pi r^2$  – площадь поперечного сечения нанокристалла,  $c$  – скорость света,  $h$  – постоянная Планка. В результате поглощения каждого фотона и последующего испускания кванта света

с большей энергией от нанокристалла будет отбираться энергия  $E_{\text{фон}}$ , следовательно, полное уменьшение энергии за время  $\Delta t$  составит:

$$\Delta E_1 = nE_{\text{фон}}$$

При комнатной температуре справедливо выражение, связывающее суммарную энергию атомов в твердом теле и его температуру ( $k_B$  – постоянная Больцмана):

$$E = 3N k_B T$$

где  $N$  – число атомов вещества, которое можно определить по формуле:  $N = N_A (m/M)$

где  $m = V \cdot \rho = 4/3 \pi r^3 \rho$  – масса нанокристалла (плотность кремния  $\rho = 2330$  кг/м<sup>3</sup>),  $N_A$  – число Авогадро и  $M \approx 0,028$  кг/моль – молярная масса кремния.

Отсюда изменение энергии при уменьшении температуры на  $\Delta T = 1^\circ$ :

$$\Delta E_2 = 3N k_B T = 3N_A N_A (m/M) k_B \Delta T$$

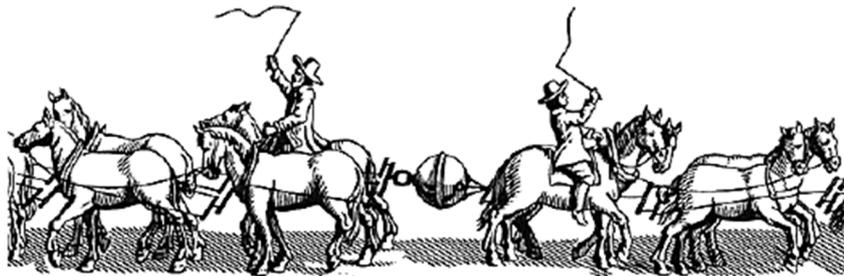
Приравнивая потери энергии  $\Delta E_1$  и  $\Delta E_2$ :

$$\frac{\rho}{100} \frac{I \pi r^2 \Delta t \lambda}{hc} E_{\text{фон}} = 3N_A \frac{m}{M} k_B \Delta T$$

Окончательно для времени имеем (учитывая, что  $1 \text{ эВ} \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж, а  $N_A k_B = R = 8,31$  Дж/моль·К):

$$\Delta t = R \frac{4r\rho}{M} \Delta T \frac{hc}{I\lambda} \frac{100}{\rho E_{\text{фон}}} \approx 10^{-2} \text{ с} = 10 \text{ мс}$$

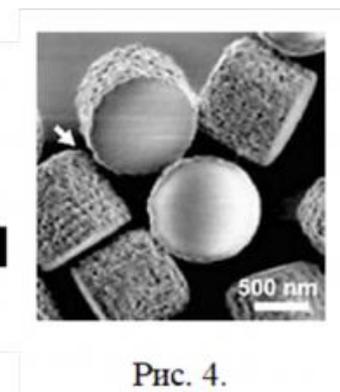
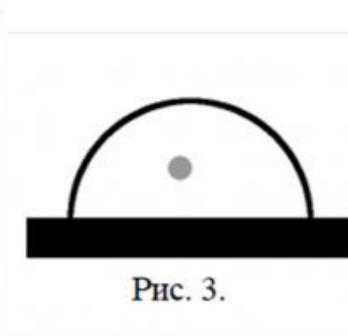
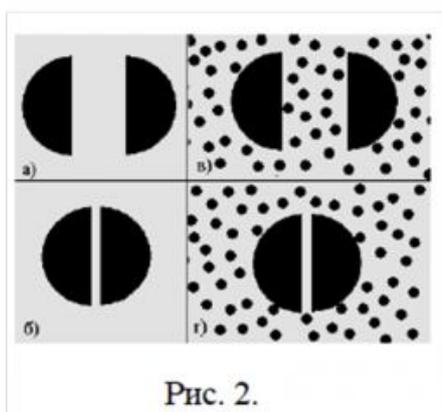
### Задача 9. Некомпенсированная сила



1. Какой физический эксперимент изображен на заглавном рисунке? Оцените силу, возникающую в таком опыте между полусферами радиусом  $r = 1$  мкм в атмосфере Марса ( $p = 1$  кПа, почти в 100 раз меньше земного). (1 балл)

Рассмотрим два покоящихся монолитных полушария радиусом  $r = 1$  мкм, которые погружены в растворитель и находятся на некотором переменном расстоянии  $x$  (порядка 3 - 50 нм) друг от друга (рис. 2).

Если в раствор добавить наночастицы радиусом 3 нм, то между полушариями может дополнительно возникнуть некоторая сила.



2. При каких расстояниях между полушариями она возникает? Будут ли полушария при этом притягиваться или отталкиваться? Почему эта сила тоже относится к некомпенсированным? Ответы поясните с точки зрения молекулярно-кинетической теории. **(2.5 балла)**

3. Оцените величину этой силы, если концентрация добавленных наночастиц составляет  $4 \cdot 10^{-4}$  моль/л. **(2.5 балла)** Опишите несколько способов, как такую некомпенсированную силу можно измерить напрямую. **(1 балл)**

4. Частицу полистирола радиусом  $r_{ps1} = 250$  нм помещают в каплю жидкости ( $\rho_l = \rho_{ps}$ ), имеющую вид полусферы с  $d_l = 5$  мкм **(рис. 3.)**. Затем в эту же каплю добавляют наночастицы полистирола  $d_{ps2} = 50$  нм. Опишите, что будет наблюдаться в микроскоп до добавления второго типа полистирольных частиц и после этого. **(2 балла)**

5. Опишите изменения, которые будут происходить в суспензии наноструктурированных микрочастиц **(рис. 4)**, если к ним добавить полимер с размером частиц около 3 нм. **(1.5 балла)** Поясните, зачем понадобилось делать гладкие торцы частиц и наноструктурированную боковую поверхность? **(1.5 балла)**

6. Вкратце напишите, где еще мы можем найти подобные явления и как их можно использовать. **(2 балла)**

### Решение:

1. Какой физический эксперимент изображен на главном рисунке? Оцените силу, возникающую в таком опыте между полусферами радиусом  $r = 1$  мкм в атмосфере Марса ( $p = 1$  кПа, почти в 100 раз меньше земного). **(1 балл)**

На рисунке изображен Магдебургский эксперимент, проведенный немецким физиком Отто фон Герике для наглядной демонстрации концепции атмосферного давления. Сила, которую необходимо приложить, чтобы разъединить полусферы, составляет ( $S$  – площадь сечения полусферы,  $\Delta P$  – разность давлений, считаем  $\Delta P = P$ )

$$F_M = S \Delta P = \pi r^2 \Delta P = 1000 \cdot 3,14 \cdot (1 \cdot 10^{-6})^2 = 3,14 \cdot 10^{-9} \text{ Н.}$$

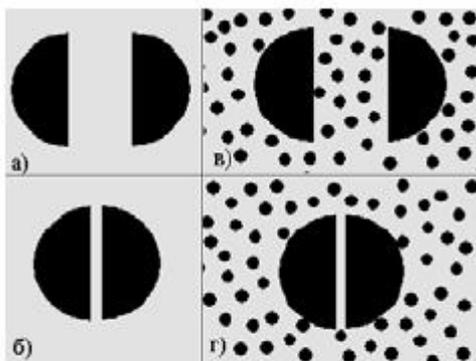


Рис. 2.

Многие участники допускали ошибку, полагая площадью суммарную площадь полусфер, в то время как «не компенсируется» только сила давления, приходящаяся на площадь сечения полусферы.

2. При каких расстояниях между полушариями она возникает? Будут ли полушария при этом притягиваться или отталкиваться? Почему эта сила тоже относится к некомпенсированным? Ответы поясните с точки зрения молекулярно-кинетической теории. (2.5 балла)

Рис. 2 призван показать (по аналогии с Магдебургским экспериментом) как между большими частицами в присутствии маленьких может возникать особая физическая сила притяжения, называемая силой обеднения, которая чрезвычайно важна для понимания многих процессов в биологии и физике микросистем. На рис. 2в усредненный по времени импульс, передаваемый каждому полушарию наночастицами, находящимися в тепловом движении, будет равен нулю. На рисунке 2г наночастицы уже не могут проникать в зазор между полушариями (соответственно, Рис. 2. сталкиваться с плоскими поверхностями полушарий и сообщать им импульс), следовательно, аналогично Магдебургскому эксперименту, возникает (дополнительная по сравнению с рис. 2б) некомпенсированная сила, «притягивающая» полушария друг к другу. При расстояниях больше 6 нм (наночастицы начинают проникать в зазор) эта сила быстро уменьшается до нуля. При расстояниях меньше 6 нм (диаметр наночастиц), сила обеднения будет действовать аналогично силе давления газа в п.1. Сила обеднения также может рассматриваться как сила осмотического давления раствора наночастиц (между полушариями находится чистый растворитель).

3. Оцените величину этой силы, если концентрация добавленных наночастиц составляет  $4 \cdot 10^{-4}$  моль/л. (2.5 балла) Опишите несколько способов, как такую некомпенсированную силу можно измерить напрямую. (1 балл)

Для расчета можно воспользоваться уравнением состояния идеального газа (или формулой осмотического давления). Помня, что в системе СИ концентрацию необходимо перевести в моль/м<sup>3</sup>, находим:

$P = cRT = (4 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3) \cdot 8,314 \cdot 298 = 991$  Па – почти как давление на Марсе (в 100 раз меньше атмосферного давления).

и аналогично п.1:  $F = P \cdot S = 991 \cdot 3,14 \cdot (1 \cdot 10^{-6})^2 \approx 3,1 \cdot 10^{-9}$  Н

Важный вывод, который можно сделать на основе проведенного расчета: **при контактах между телами, при наличии в системе наночастиц, могут возникать довольно значительные силы.**

Чтобы их измерить, можно воспользоваться любыми способами измерения малых сил для микро- и нанообъектов (например, с помощью оптического пинцета или атомно-силового микроскопа).

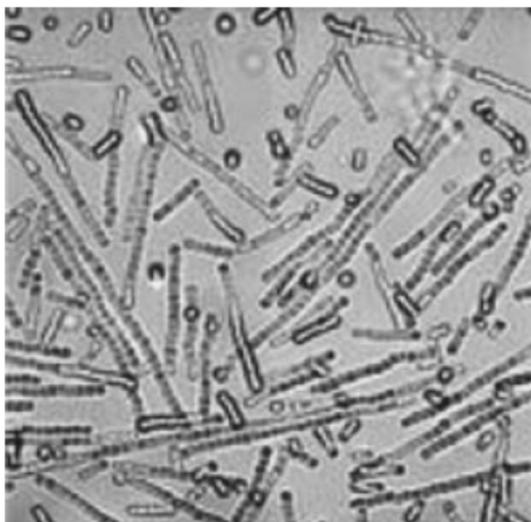
4. Частицу полистирола радиусом  $r_{ps1} = 250$  нм помещают в каплю жидкости ( $\rho_l = \rho_{ps}$ ), имеющую вид полусферы с  $d_l = 5$  мкм (рис. 3.). Затем в эту же каплю добавляют наночастицы полистирола  $d_{ps2} = 50$  нм. Опишите, что будет наблюдаться в микроскоп до добавления второго типа полистирольных частиц и после этого. (2 балла)



До добавления наночастиц будет происходить броуновское движение большой полистирольной микросферы по всей капле. После – при контактах микросферы с границей капли будет возникать сила обеднения, «удерживающая» микросферу на границе. Продолжая броуновское движение вдоль границы, рано или поздно она коснется второй границы,

где силы обеднения станут «удерживать» микросферу в контакте сразу с двумя поверхностями. То есть, станет наблюдаться беспорядочное движение большой частицы в пределах кольца – наночастицы «выгонят» ее на периферию капли.

5. Опишите изменения, которые будут происходить в суспензии наноструктурированных микрочастиц (рис. 4), если к ним добавить полимер с размером частиц около 3 нм. (1.5 балла) Поясните, зачем понадобилось делать гладкие торцы частиц и наноструктурированную боковую поверхность? (1.5 балла)



При броуновском движении частицы могут сталкиваться друг с другом всевозможными способами. Однако только при контактах гладких торцов будет возникать максимальная сила (она, как мы помним, пропорциональна площади контакта), удерживающая частицы вместе. Таким образом, частицы будут собираться в «палочки» – происходит самоорганизация. Бока сделаны шершавыми, чтобы площадь их контактов (и, соответственно, сила обеднения) была минимальной – т.е. чтобы при таких контактах частицы не слипались.

6. Вкратце напишите, где еще мы можем найти подобные явления и как их можно использовать. (2 балла)

Сила обеднения часто проявляет себя в коллоидных системах, содержащих частицы разных размеров. Она играет важнейшую роль в работе живых систем: управляет многими процессами внутри живых клеток (агрегация органелл), «слипанием» в столбики эритроцитов в крови (см. задачу по биологии «СОЭ»). Находит практическое применение,

например, при осаждении фотонных кристаллов или для получения из раствора кристаллов (кристаллизации) крупных белков.

### **Задача 10. Нанолампы накаливания**

Нити первых ламп накаливания изготавливались из углеродного волокна. Такие лампы не могли работать на большой мощности: их колба внутри темнела (рис. 1а) и они перегорали, поэтому их заменили более эффективные лампы с вольфрамовой спиралью. Однако прошло более ста лет, и ученые вновь вернулись к углеродным материалам для нитей накаливания, на этот раз в наномасштабе.

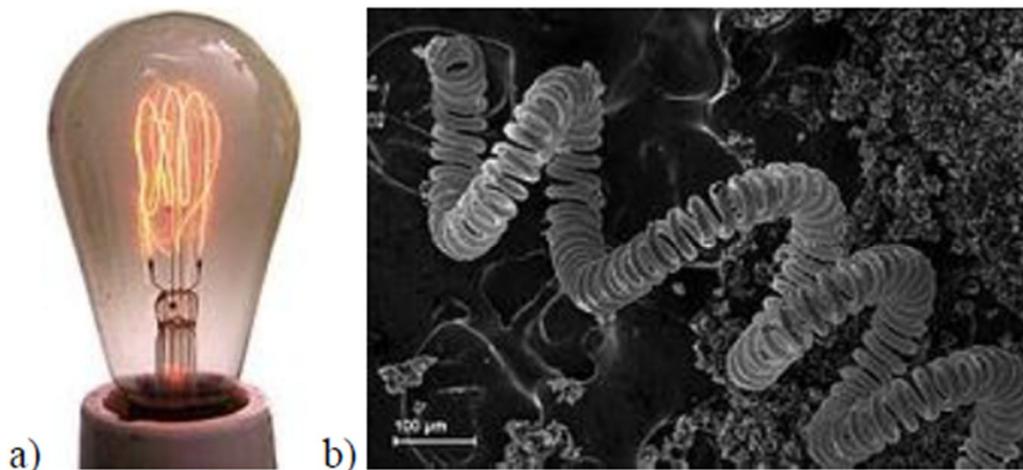


Рис. 1. а) Одна из первых ламп накаливания – с нитью из углерода. б) Изображение спирали вольфрамовой нити обычной лампы накаливания, полученное при помощи сканирующей электронной микроскопии (СЭМ).

- 1. Из-за чего обычно «перегорают» лампы накаливания?(0.5 балла)**
- 2. Какая лампа накаливания при одинаковой не слишком высокой температуре нити прослужит дольше: с углеродной нитью, с нитью на основе УНТ или на основе графена? Почему? (1 балл)**
- 3. Поясните, можно ли повысить эффективность наноламп накаливания по аналогии с обычными лампами, используя вольфрамовую нанопроволоку или нанофольгу тех же размеров, что и УНТ или полоска графена? (2 балла)**

Как можно видеть на рис. 2а и 3а, в конструкции нанолампочек всегда присутствует некоторый зазор между подложкой и нитью накала.

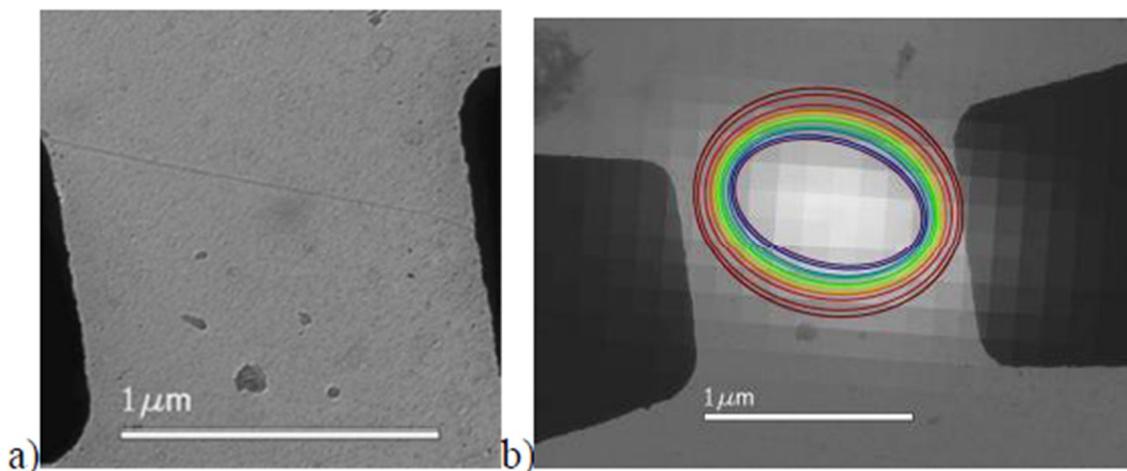


Рис. 2. Нанолампочка из углеродной нанотрубки (УНТ). Похожа на лампочку Эдисона – питается от напряжения 5 В, вакуумируется, но ее волосок в 105 раз короче и тоньше. Тем не менее, ее свечение видно даже невооруженным глазом. а) ПЭМ изображение УНТ между двумя электродами. Длина УНТ – 1.4 мкм, внешний диаметр – 13 нм (состоит из 11 слоев). б) Наложенное на ПЭМ видимое свечение УНТ (одним цветом обозначены зоны с одинаковой яркостью).

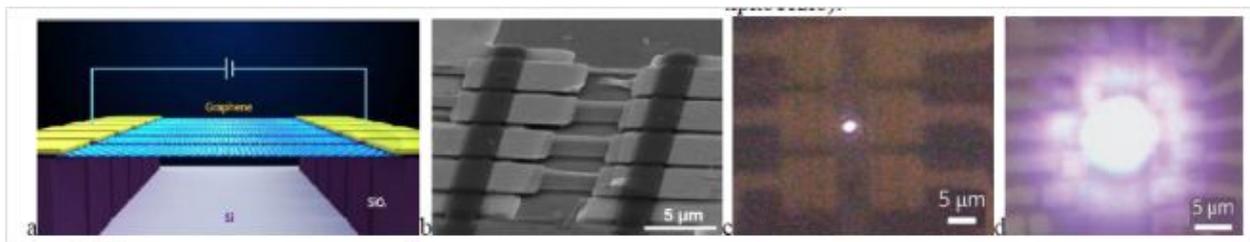


Рис. 3. Массив нанолампочек из графена. а) Схема массива из шести графеновых лент. б) СЭМ изображение массива из пяти графеновых лент. Свечение массива при разных силах тока (изображения получены в оптический микроскоп). в) Слабое свечение при небольшой силе тока ( $U = 2.5 \text{ В}$ ,  $I = 120 \text{ мкА}$ ; размер ленты: длина 2 мкм, ширина 5 мкм). д) При максимальной силе тока свет графеновой нанолампочки, также как для нанотрубки, можно заметить невооруженным глазом.

4. Для чего необходим такой зазор? **(1 балл)**

5. Найдите КПД графеновой лампы (рис. 3с), если мощность ее видимого излучения составляет 1.35 мкВт. **(1 балл)**

6. Исходя из параметров графеновой лампы (рис. 3с), оцените потребляемую мощность лампочки из УНТ (рис. 2). **(3 балла)**

Представьте себе, что нить накала в лампочке на рис. 1а заменили на УНТ такой же длины, как и углеродная нить, но по остальным параметрам трубки аналогичную использованной в нанолампе (рис. 2).

7. Почему такая лампа не заработает от сети 220 В, и можно ли будет заставить ее работать без изменения конструкции? **(2 балла)**

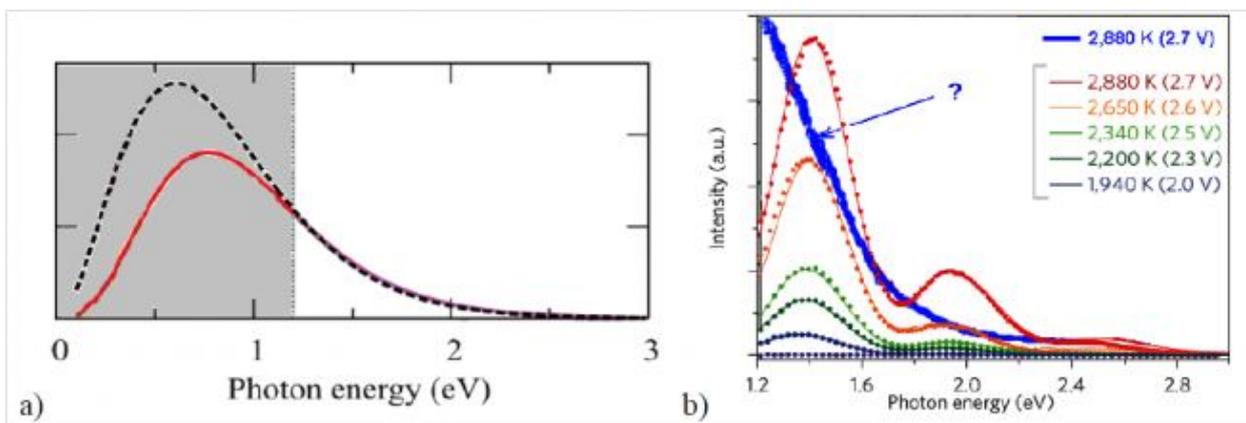


Рис. 4. а) Спектр излучения абсолютно черного тела при 2500К (пунктир) и расчетный спектр излучения графена (красный). б) Экспериментальные спектры излучения графеновой лампочки (рис. 3с) для разных температур накала.

Расчетный спектр излучения графена при нагревании мало отличается от излучения абсолютно черного тела (рис. 4а). С ростом температуры накала максимум в спектре излучения должен, как и у «черного тела», смещаться из красной в синюю область (подобно тому, как меняется цвет раскаленного металла). Однако спектр реальной графеновой нанолампы (рис. 3с) имеет несколько максимумов. Причем при повышении температуры накала положение максимумов и минимумов изменяется слабо (рис. 4б).

8. Объясните причину наблюдаемых особенностей спектра реальной графеновой нанолампочки. **(1 балл)**

9. Что и как ученые изменили в конструкции чтобы спектр нанолампы стал таким, который отмечен вопросом на рис. 4б? **(1.5 балла)**

10. Оцените расстояние между графеном и подложкой в нанолампе на рис. 4б. **(3 балла)**

**Решение:**

1. Из-за чего обычно «перегорают» лампы накаливания?(0.5 балла)

Из раздела «КПД и долговечность» статьи «Лампа накаливания» в Википедии: «Время службы лампы накаливания ограничено в меньшей степени испарением материала нити во время работы, и, в большей степени, возникающими в нити неоднородностями. Неравномерное испарение материала нити приводит к возникновению истончённых участков с повышенным электрическим сопротивлением, что, в свою очередь, ведёт к ещё большему нагреву участка нити и интенсивному испарению материала в таких местах, так как мощность в последовательной электрической цепи пропорциональна  $I^2 \cdot R$ . Таким образом, имеется неустойчивость к утоньшению участков нити. Когда одно из этих сужений истончается настолько, что материал нити в этом месте плавится или полностью испаряется, лампа выходит из строя». Таким образом, процесс перегорания запускают неоднородности толщины нити.

2. Какая лампа накаливания при одинаковой не слишком высокой температуре нити прослужит дольше: с углеродной нитью, с нитью на основе УНТ или на основе графена? Почему? (1 балл)

Дольше всего будет служить самая однородная на наномасштабе нить накаливания. Наименее однородная – углеродная нить (состоит из отдельных фрагментов графита, полученных в результате обугливания органических материалов, с большим количеством реакционноспособных краев и тонких мест), она выйдет из строя быстрее всего.

В отличие от идеальной боковой поверхности нанотрубок, боковые края графена неидеальны (содержат дефекты, то есть некомпенсированные связи), поэтому будут разрушаться (испаряться) быстрее. К тому же, внутренние слои нанотрубок защищены от внешнего воздействия внешними слоями, поэтому возможное появление со временем дефектов на внешнем слое нанотрубки не ведет к их быстрому распространению внутрь, в то время как возникновение и распространение дефектов внутри листа графена угрожает разрушением всему листу. Поэтому дольше всего прослужит лампа накаливания с нитью на основе нанотрубок.

*3. Поясните, можно ли повысить эффективность наноламп накаливания, по аналогии с обычными лампами, использовав вольфрамовую нанопроволоку или нанофольгу тех же размеров, что и УНТ или полоска графена? (2 балла)*

Поверхность УНТ и листа графена практически не имеет дефектов – все атомы углерода упорядочены системой жестких ковалентных связей и являются валентно насыщенными. В металлах нет таких прочных связей, как в графене, атомы на поверхности удерживаются не так прочно и обладают повышенной энергией и реакционной способностью по сравнению с атомами в объеме металла. Поэтому изготовить атомно точные нанолит и нанопроволоку из вольфрама (на манер графена и УНТ) не получится – они будут обладать большим количеством дефектов и неоднородностей. Более того, нанолиты и нанопроволока из вольфрама (по указанным выше причинам; в отличие от графена и УНТ) будут обладать значительно более низкой температурой плавления, чем «обычная» нить накаливания (см. «Почему наночастицы плавятся при низкой температуре?»).

Если в обычных лампочках вольфрамовая нить позволила достичь более высокую однородность и лучшие технические характеристики по сравнению с углеродной нитью, то на наномасштабе ситуация полностью противоположная – в нанолампах накаливания металлические материалы проигрывают углеродным.

*Как можно видеть на рис. 2а и 3а, в конструкции нанолампочек всегда присутствует некоторый зазор между подложкой и нитью накала.*

*4. Для чего необходим такой зазор? (1 балл)*

Чтобы выделяющееся при прохождении тока тепло шло на нагрев нити накала, а не на нагрев подложки. Например, без зазора КПД графеновой нанолампы уменьшится в 1000 раз.

*5. Найдите КПД графеновой лампы (рис. 3с), если мощность ее видимого излучения составляет 1,35 мкВт. (1 балл)*

КПД лампочки – это отношение мощности видимого излучения к потребляемой мощности:

$$\eta = \frac{P_v}{U \cdot I} \cdot 100\% = \frac{1,35 \cdot 10^{-6}}{2,5 \cdot 120 \cdot 10^{-6}} \cdot 100\% = 0,45\%$$

Казалось бы, это почти в 5-10 раз меньше, чем КПД обычной 60-100-ваттной лампочки накаливания, но (поскольку КПД ламп накаливания быстро уменьшается с мощностью), сопоставимо с КПД маленькой лампы накаливания на 5 Ватт. Авторы статьи про графеновую нанолампу пишут, что если экстраполировать КПД вольфрамовой лампы накаливания к мощности нанолампы, то КПД последней окажется почти в 10 раз больше!

6. Исходя из параметров графеновой лампы (рис. 3с), оцените потребляемую мощность лампочки из УНТ (рис. 2). (3 балла)

Допустим, каждый слой многослойной УНТ (рис. 2а условия) имеет то же удельное сопротивление, что и лист графена (рис. 3с), тогда:

$$R_G = \frac{U_G}{I_G} = \frac{\rho_G l_G}{S_G} = \frac{\rho_G l_G}{w_G x},$$

где  $x$  – условная «толщина» слоя графена.

$$R_{NT} = \frac{\rho_G l_{NT}}{S_{NT}} = \frac{R_G w_G x l_{NT}}{I_G S_{NT}} = \frac{R_G w_G x l_{NT}}{I_G \pi d_{NT} \cdot 11x} = \frac{U_G w_G x l_{NT}}{I_G l_G \pi d_{NT} \cdot 11x}$$

(представляем УНТ как лист графена шириной в 11 разверток УНТ, разницей диаметров разверток разных слоев пренебрегаем).

$$P_{NT} = \frac{U_{NT}^2}{R_{NT}} = \frac{11U_{NT}^2 I_G l_G \pi d_{NT}}{U_G w_G l_{NT}} = \frac{11 \cdot 5^2 \cdot 120 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 3,14 \cdot 13 \cdot 10^{-9}}{2,5 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 1,4 \cdot 10^{-6}} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Вт}$$

Иными словами, потребляемая мощность нанолампочки (150 мкВт) на основе УНТ в 2 раза меньше потребляемой мощности графеновой нанолампы.

*Представьте себе, что нить накала в лампочке на рис. 1а заменили на УНТ такой же длины, как и углеродная нить, но по остальным параметрам трубки аналогичную использованной в нанолампе (рис. 2).*

7. Почему такая лампа не заработает от сети 220 В и можно ли будет заставить ее работать без изменения конструкции? (2 балла)

Как сказано в условии, волосок лампы Эдисона в  $10^5$  раз\* (100 000) длиннее. Если мы во столько же раз «удлиним» нанотрубку из нанолампочки (рис 2), ее сопротивление увеличится пропорционально, в 100 000 раз. Одновременно мы поднимаем напряжение питания с 5 В до 220 В – в 44 раза. Потребляемый ток (по сравнению с нанолампой) уменьшается в 23 000 раз. Очевидно, такой силы тока не хватит для разогрева до свечения нити накаливания: это как пытаться «запитать» лампу на 220 В от маленькой батарейки. Чтобы нить накала засветилась, необходимо в тысячи раз увеличивать напряжение питания, но сделать это, не изменяя конструкцию, не получится: контакты в патроне питания расположены слишком близко (вспомним, какие большие расстояния должны быть между проводами в многокиловольтных ЛЭП). Чтобы лампа с УНТ работала от 220 вольт надо менять предложенную конструкцию: либо делать более толстую нить накала, состоящую из тысяч нанотрубок, либо уменьшать ее длину.

\*В html версии условия задачи (но не в pdf) потерялось форматирование, и 105 превратилось в 105. Тем, кто считал соотношение длин 105 вместо  $10^5$  баллы не снижались.

8. Объясните причину наблюдаемых особенностей спектра реальной графеновой нанолампочки. (1 балл)

Часть светового потока, излучаемая в направлении подложки, отражается от нее и, проходя через прозрачный графен, интерферирует с излучаемым в противоположную сторону светом. Если разность хода ( $2d$ , где  $d$  – расстояние между графеном и подложкой) составляет четное число полуволн ( $2d = 2n\lambda/2$ ), то будет наблюдаться максимум, если нечетное ( $2d = (2n-1)\lambda/2$ ) – минимум.

9. Что и как ученые изменили в конструкции чтобы спектр нанолампы стал таким, который отмечен на рисунке 4b вопросом? (1.5 балла)

Сравнивая рис. 4а с рис. 4b, мы видим, что отмеченный вопросом спектр графеновой нанолампы соответствует расчетному спектру графена при отсутствии интерференции. Значит, ученые как-то «убрали» интерференцию. Для этого можно сделать глубину зазора очень большой, либо (как и сделали ученые) уменьшить глубину зазора так, чтобы первый интерференционный минимум и максимум не попадали в коротковолновую часть спектра:

$d \ll \lambda/4$  (или, подставляя в п.10  $E_{\min} = 1.2$  эВ, можно найти  $d \ll 250$  нм)

10. Оцените расстояние между графеном и подложкой в нанолампе на рис. 4b. (3 балла)

Для начала запишем формулу перевода энергии фотонов в длину волны:

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E, \quad \lambda(\text{nm}) = \frac{h(\text{eV}) \cdot c(\text{nm})}{E(\text{eV})} = \frac{4,14 \cdot 10^{-15} \cdot 3 \cdot 10^{17}}{E(\text{eV})} = \frac{1242}{E(\text{eV})}.$$

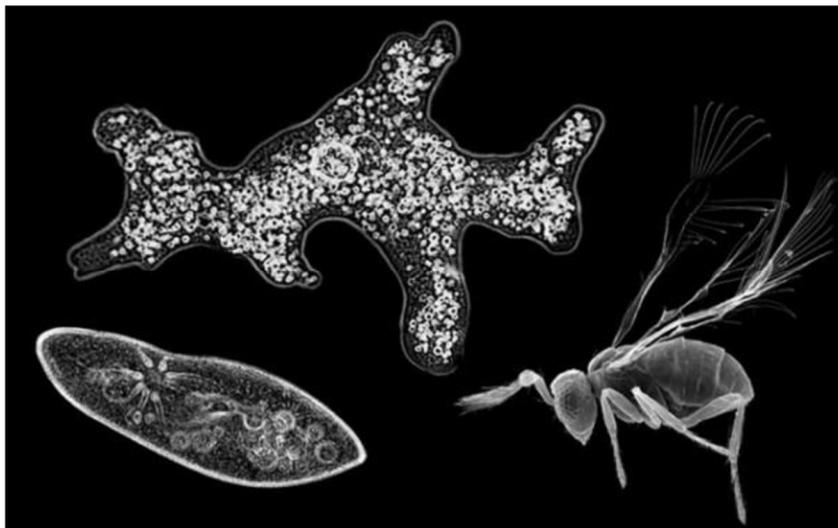
По графику (рис. 4b условия), расстояние между первым и вторым интерференционными максимумами составляет примерно 0,6 эВ. Это расстояние отвечает удвоенной глубине зазора (см. п.8), следовательно:

$$d = \frac{\Delta\lambda}{2} = \frac{1242}{2\Delta E} = \frac{1242}{2 \cdot 0,6} = 1035 \text{ нм}.$$

## Биология

### Задача 1. Как стать меньше?

Известно, что бактерии – самые маленькие и при этом самые многочисленные из всех известных на нашей планете живых организмов. Они встречаются повсеместно и обладают особенностями строения и функциями, которые позволяют им приспосабливаться к изменяющимся условиям и, фактически, господствовать на Земле. Но бактерии не одиноки в своих малых размерах. Есть и очень маленькие многоклеточные организмы, например, оса Мегафрагма мимаровая (*Megaphragma mimaripenne*), длина которой не более 0,2 мм.



Вопросы:

1. От чего зависит размер одноклеточных организмов? **(1 балл)**
2. За счет чего одноклеточные организмы достигают уменьшения размеров? **(1 балл)**
3. За счет чего возможно уменьшение размеров многоклеточных организмов? **(1 балл)**
4. Как Вы думаете, с чем связана миниатюризация ос Мегафрагм и чем это может быть им выгодно? **(1 балл)**
5. Представьте, что Вы открыли новое уникальное животное (например, насекомое), размер которого на несколько порядков меньше размеров других животных из этого же семейства. Перед Вам стоит задача понять, за счет чего же произошло такое поразительное уменьшение размеров. Какие ткани, органы и клетки Вы будете изучать в первую очередь? Какие бы Вы сделали предположения и как бы проверили свои догадки? **(3 балла)**

Решение:

1. Размер одноклеточных организмов определяется количеством и составом их внутриклеточных структур. Отсутствие ядра, митохондрий и центриол у бактерий – один из способов уменьшить размер клетки. Чем больше в клетке хранится запасенных питательных веществ (на случай неблагоприятных условий), тем будет больше и размер. Бактерии питательные вещества практически не запасают, поскольку при плохих условиях они образуют споры и в таком виде переживают “до лучших времен”. Толщина и количество внешних стенок, наличие внутриклеточного цитоскелета и сложноустроенных жгутиков и

ворсинок также влияют на размер клетки (в сторону увеличения). Ядерные одноклеточные животные достигают уменьшения своих размеров за счет уменьшения размеров ядра (уменьшая количество ДНК, а значит, и количество кодируемых белков, упрощая свою организацию), а также за счет уменьшения количества и размеров других мембранных внутриклеточных органоидов.

2. Правильный ответ следует из первого подвопроса. Одноклеточные организмы достигают уменьшения своих размеров, в первую очередь, за счет уменьшения числа внутриклеточных структур и упрощения их устройства. Во вторую очередь, одноклеточные организмы уменьшают количество запасенных питательных веществ; в третью очередь, могут упрощаться и, как следствие уменьшатся в размерах мембранные структуры.

3. Размер многоклеточных организмов зависит от общего числа клеток и от их размеров. Таким образом, уменьшение размера может происходить как за счет снижения размеров клеток, так и за счет уменьшения числа клеток в составе органов и тканей.

4. Эти осы пошли по пути одновременного упрощения строения органов за счет уменьшения числа клеток (в данном случае, нервная система содержит рекордно малое количество нейронов) и уменьшения клеточных размеров за счет упрощения устройства клеток. Так, 95% нейронов этих животных не содержат ядра, “теряя” их на стадии перехода из личинки в имаго. Осы Мегафрагмы живут всего несколько дней, поэтому их нейроны используют тот запас белков, которые образовались на стадии личинки.

5. Принимаются любые обоснованные логичные ответы. Например, можно предложить такой путь: изучение под микроскопом (оптическим, электронным) морфологию животного и его отдельных частей и сравнить ее с морфологией тех животных, которые кажутся близкими филогенетически. Упрощение устройства органов может быть за счет снижения числа клеток и/или уменьшения числа компонентов клеток. Далее можно провести детальный анализ морфологии клеток из разных тканей при помощи специфического окрашивания органоидов и клеточных структур: ядра, митохондрий, центриолей, цитоскелета и проч. Таким образом можно выявить, не произошла ли “утрата” какой-либо из структур, что способствовало уменьшению размера клеток.

## **Задача 2. Что эффективнее?**

В одном научно-исследовательском институте три конкурирующие лаборатории занимались разработкой противоракового лекарственного препарата, особенностью которого было избирательное проникновение в раковые клетки. Первая группа разработала соединение, накапливающееся в цитоплазме опухолевых клеток, вторая – соединение, проникающее в митохондрии, третья – вещество, селективно транспортируемое в ядро. В основе действия всех соединений лежал один и тот же принцип: при освещении лазерным светом соединение участвовало в образовании радикала  $O_2^-$ , который, в свою очередь, инициировал окисление близко расположенных молекул.

### **Вопросы:**

1. Какие участки в соединениях всех трех типов были сходными, а какие различными **(0,5 балла)**? В общих чертах опишите строение каждого соединения и укажите, для чего нужна была каждая часть **(0,5 балла)**.

2. Как называются вещества, образующие супероксид-анион радикал при действии света **(0,5 балла)**? Какая длина волны лазерного света предпочтительнее при использовании таких веществ в тканях и органах и почему **(0,5 балла)**?
3. Расположите все три вещества по мере возрастания терапевтического эффекта. Ответ обоснуйте **(1 балл)**.
4. Какие еще активные формы кислорода (АФК) Вы знаете **(0,5 балла)**? Какие из АФК наиболее реакционноспособные и опасные для клеток **(0,5 балла)**?
5. Предложите еще какой-нибудь способ для направленного подавления именно раковых клеток **(2 балла)**.

**Решение:**

1. Сходным являются следующие участки: носитель молекулы-фотосенсибилизатора (продуцирующей АФК под действием лазерного света), участок, отвечающий за избирательное проникновение всей конструкции в раковые клетки и участок, обеспечивающий выход конструкции из эндосом в цитоплазму. Отличающиеся участки это: участок митохондриальной или ядерной локализации.
2. Это вещества-фотосенсибилизаторы. Предпочтительнее использовать красный лазер, поскольку красный свет глубже проникает в ткани и меньше сам по себе повреждает здоровые клетки.
3. Терапевтический эффект будет выше в случае конструкции, проникающей в ядро, поскольку супероксид-анион радикал будет повреждать ДНК. Повреждение и гибель всех митохондрий в клетке тоже будет способствовать гибели клетки, только вероятность того, что молекулы-транспортёры проникнут в подавляющее большинство митохондрий, очень мала. Кроме того, митохондрии обладают собственной системой защиты от супероксид-анион радикала, поскольку он образуется постоянно при работе дыхательной цепи.
4. АФК: перекись водорода, синглетный кислород, пероксинитрит ONOO<sup>-</sup>, гидроксил-анион радикал OH<sup>•</sup>. Самые агрессивные формы – это две последние из перечисленных.
5. Еще потенциально-действенный вариант – это направленная доставка в раковые клетки наноконструкций, которые будут, к примеру, нагреваться и нагревать окружающую клетку при действии лазера и тем самым нарушать их работу.

### ***Задача 3. Нанотехнологии и зрение***

В лаборатории университета Пенсильвании использовали приемы генной терапии, чтобы вылечить самцов беличьей обезьяны от врожденного дальтонизма (животные не различали зеленый и красные цвета). Проведенные проверочные эксперименты показали, что обезьяны приобрели правильное цветовое зрение. Любимым лакомством обезьянок были съедобные ягоды черной бузины, которые сотрудники собирали в соседнем лесу. Один из сотрудников забыл закрыть клетку обезьян и ночью они сбежали в лес, где наелись своих любимых ягод. Утром, когда обезьяны вернулись, оказалось, что у них всех пищевое отравление, вызванное тем, что они съели ядовитые ягоды бузины красной.

- 1) Стажер лаборатории расстроился, что операция не удалась. Но дальнейшие тесты выяснили, что обезьяны прошли тесты на цветовое зрение. А вы как думаете, в чем причина,

того что обезьяны перепутали красный и черный цвет ягод? Свой ответ объясните. (3 балла)

2) В каком современном нанобиотехнологическом методе используются молекулы-“родственники” зрительных пигментов, чтобы исследовать работу нервных клеток? (1 балл)

3) Какие фоторецепторы определяют цветовое зрение у приматов, опишите их? К появлению фоторецепторов какого типа привела генная терапия? (4 балла)

4) Как вы думаете, какие витамины нужно принимать, чтобы улучшить зрение и почему?(1 балл) Почему и как именно отличается размер зрачка в темноте и на свету?(1 балл)

#### **Решение:**

1. Так как в темноте колбочки не работают, то за зрение в сумерках у приматов отвечают палочки. В темноте зрение человека становится черно-белым и наблюдается так называемый сдвиг Пуркинье. Красный цвет с темноте становится практически черным, а синие объекты более светлыми. Вероятно поэтому обезьяны и перепутали ягоды.

2. Это оптогенетика, которая основана на том, что методом генной инженерии в мембраны нервных клеток внедряют опсины, которые возбуждаются светом.

3. Известно, что цветное зрение, это вид зрительного ощущения, которое мы получаем при восприятии нашими глазами светового излучения, испускаемого источниками излучения или отраженного предметами. В глазе приматов существуют 2 типа фоторецепторов: колбочки и палочки. Палочки содержат зрительный пигмент родопсин, чувствительный в сине-зеленой части спектра. Колбочки содержат пигмент йодопсин. У приматов обнаружены три вида колбочек, колбочки S-типа, M-, и L-типа. Они чувствительны соответственно в фиолетово-синей (S от англ. Short — коротковолновый спектр), в зелено-желтой (M от англ. Medium — средневолновый) и в желто-красной (L от англ. Long — длинноволновый) частях спектра. У дальтоников не различающих красные и зеленые цвета – отсутствуют колбочки L- типа.

4. Для улучшения зрения медики советуют принимать витамины группы А, так как они участвуют в синтезе и родопсина, и йодопсина, которые представляют из себя опсин и окисленный витамин А (ретинол). Размер зрачка в темноте увеличивается, а на свету уменьшается, так как зрачок служит диафрагмой и через него регулируется световой поток, попадающий на сетчатку.

#### **Задача 4. «Кровавые» эксперименты Хагрида**

Во время одного из уроков в Хогвартсе Хагрид принес эритроцитарную массу, выделенную из крови магических существ. Это были эритроциты, выделенные из крови саламандры (маленькое огненное земноводное), раморы (серебристая рыба из Индийского океана), дракона (большой летающий ящер), феникса (сказочная птица), гиппогрифа (полулошадь-полуорел) и ре-эма (гигантский бык с золотистой кожей).

1. Учитывая происхождение перечисленных животных, ученики должны были разместить их в ряд, исходя из размера эритроцитов (от большего размера к меньшему). Выполните это же задание, аргументировав свое мнение (3 балла).

2. Следующим заданием было выделить из эритроцитов ДНК. Как вы думаете, в эритроцитах каких существ ДНК точно не было, у каких оно вероятно было, а у каких оно могло как быть, так и не быть. Поясните ход своих мыслей **(3 балла)**.

3. Ученики должны были изучить современный метод из мира маглов, основанный на нанотехнологиях, который позволил бы им исследовать свойства мембранносвязанного гемоглобина в интактных эритроцитах. Что за метод из нашего мира изучали ученики волшебной школы **(2 балла)**? Как Вы думаете, каким образом была получена эритроцитарная масса, если учесть, что у Хагрида не было центрифуги? **(2 балла)**

#### **Решение:**

1. В процессе эволюции позвоночных шла тенденция к уменьшению размера эритроцитов. У земноводных эритроциты больше чем у ящериц, у ящериц больше чем у птиц, у млекопитающих самые маленькие. Однако у рыб они по размеру сравнимы часто с эритроцитами птиц. Исходя из происхождения родственников этих существ из мира маглов, можно предположить, что самые большие эритроциты у саламандры (как у земноводного), затем у дракона, эритроциты у птицы феникс и у рыбы раморы могут быть похожего размера, немного меньше у полугрифа-полулошади – гиппогрифа и самые маленькие у ре-эма.

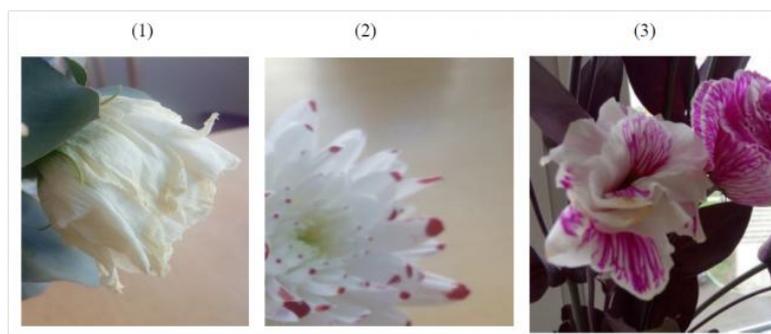
2. У большинства позвоночных, кроме млекопитающих, есть ядро и следовательно ДНК. Таким образом только в эритроцитах у ре-эма точно нет ДНК и непонятно, есть ли она в эритроцитах гиппогрифа. У остальных существ в эритроцитах ДНК скорее всего есть, за исключением саламандры. У некоторых видов саламандр эритроциты не содержат ядра.

3. Для исследования примембранного гемоглобина в интактных эритроцитах используется метод гигантского комбинационного рассеяния (ГКР). За счет эффекта плазмонного резонанса, которым обладают наночастицы благородных металлов, метод ГКР позволяет изучать конформационные изменения в молекулах примембранного гемоглобина. Для того чтобы осадить эритроциты – без центрифуги, нужно просто подождать. Под силой тяжести эритроциты осядут и кровь разделится на две основные фракции – плазму и эритроцитарную массу.

#### **Задача 5. Как вырастить красивые цветы?**

Учитель биологии рассказал своему классу про методы генетики и направленного отбора растений с желаемыми особенностями, после чего дал классу первое сложное задание: за весну и лето вырастить самые красивые цветы, желательно с необычной окраской. При этом надо было использовать доступные приемы селекции и, конечно, здравый смысл. Саша, Света и Максим решили обязательно победить, но, как это часто бывает, со всеми летними делами совсем забыли о своем задании, вспомнив о нем всего лишь за несколько дней до начала учебного года. Сходив в ближайший цветочный магазин, каждый из них выбрал по букету цветов. Но как же сделать цветы необычной окраски? Не долго думая, Саша добавил в воду к своим цветам яркую краску, Света обрызгала свои цветы акварелью из пульверизатора, а Максим долил в воду к своему букету красивый концентрированный малиновый коллоидный раствор наночастиц золота, который нашел у своего старшего брата-химика среди реактивов, принесенных с работы. На следующий день ребята отправились в школу, где перед началом занятий устроили общую выставку-конкурс цветов.

Вот фотографии цветов, которые принесли наши герои (фотографии показаны в случайном порядке, не отражая порядок перечисления школьников в тексте):



Ребята были несколько удивлены, когда учитель биологии сказал, что они дисквалифицированы, а их цветы сняты с соревнований. В случае цветов с фотографии (1) такое решение было полностью понятно, так как цветы завяли. Для цветов с фотографий (2) и (3) учитель подробно объяснил, что ребята сделали с цветами и почему это не входит в перечень допустимых действий.

#### **Вопросы:**

1. Укажите, на какой фотографии показаны чьи цветы, что именно с ними сделали, почему цветы завяли/изменили окраску и как Вы и учитель об этом догадались **(1,5 балла)**.
2. Какие методы селекции могли бы использовать ребята, чтобы корректно выполнить свое задание **(2 балла)**? Какие цветы для этого они должны были бы выбрать **(0,5 балла)**?
3. А для чего вообще нужны цветы и их окраска **(1 балл)**?
4. От чего зависит окраска цветов **(1 балла)**?
5. При помощи каких приемов нанобиотехнологии можно вывести сорта цветов с необычной окраской **(2 балла)**? Будет ли это передаваться по наследству **(1 балл)**?
6. Предложите способ изменения окраски цветка у растения (приведите любой вариант), чтобы повысить его опыляемость **(1 балл)**.

#### **Решение:**

1. На фотографии (1) показан цветок из букета Максима, добавившего к цветам коллоидных раствор золота. Можно предположить, что наночастицы “забили” проводящую систему стеблей и вода поступала к цветкам в недостаточном количестве или не поступала вовсе. На фотографии (2) показан цветок из букета Светы, которая обрызгала краской цветы. Об этом свидетельствует четкая форма цветочных патен на лепестках и их локализация на кончиках цветов, куда в первую очередь и попадает краска. На фотографии (3) показаны цветы из букета Саши, который долил краситель в вазу с цветами. Данный сорт цветов (лизиантус) активно всасывает воду, а в данном случае – воду с красителем. Поэтому ярко-малиновый цвет распространился по жилкам цветков, в которых проходят проводящие воду сосуды. По такому характерному “полосатому” окрасу можно сразу определить подкрашивание цветов путем внесения краски в воду.

2. Предполагалось, что ученики за весну-лето должны посадить какие-то цветковые растения, быстро растущие, цветущие и дающие семена. При появлении первых цветов

провести перекрестное опыление между цветами с наиболее интересной окраской (если есть такая возможность), а потом из первого поколения отобрать семена от наиболее красивых цветов и снова их высадить. В таком случае, конечно, не предполагается выведение каких-то удивительных новых сортовых цветов, так как на это требуется много времени. Для того, чтобы успеть выполнить задание за лето, ребята должны были влять растения с коротким вегетативным периодом. Возможные варианты: петуния (можно высадить в виде готового кустика в апреле-мае или растить из семян дома; растение быстро дает цветы и можно успеть за лето высадить еще новые растения из полученных семян), мирабилис ялапа (он же – ночная красавица или зорька).

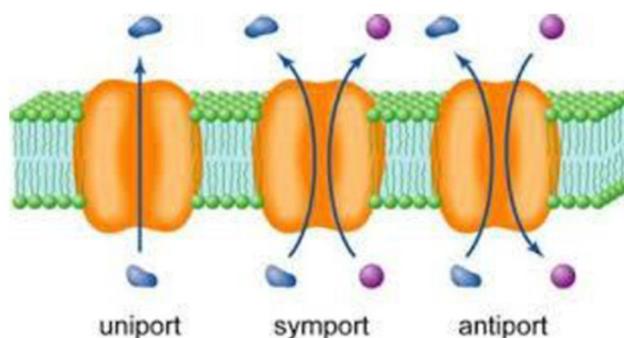
3. Цветы нужны, в первую очередь, чтобы привлекать насекомых-опылителей. В зависимости от опылителя (зрения, формы тела и крыльев, и т.п.) у цветов в ходе эволюции сформировались цветки разной формы, цвета и с самым разным запахом.

4. Окраска цветов зависит от пигментного состава лепестков. Разные пигменты поглощают свет разных длин волн, что и делает окраску цветов самой разной. При чередовании, сочетании пигментов возникают узоры и причудливые оттенки лепестков.

5. Один из подходов – это трансфекция с последующей экспрессией в клетках лепестков новых генов, отвечающих за синтез пигментов, нехарактерных для данного растения. Чтобы новая окраска передавалась по наследству, необходимо, чтобы внесенный ген встроился в собственную молекулу ДНК в ядре клеток.

6. Надо рассмотреть особенность насекомых-опылителей. Возможный вариант – это экспрессия генов, отвечающих за ферменты, синтезирующие пигменты, которые насекомые-опылители видят лучше всего. Другой вариант – экспрессировать синтез ферментов, синтезирующих пигменты, которые видят другие, нехарактерные для данных цветов насекомые-опылители и тем самым увеличить количество видов насекомых, участвующих в опылении.

### **Задача 6. Мембранный транспорт**



У любой живой клетки концентрация многих веществ внутри клетки отличается от их концентрации снаружи. Например, для нормального функционирования клеток они должны уметь создавать внутри клетки повышенную по сравнению с окружающей средой концентрацию глюкозы и других важных метаболитов. Транспорт многих таких веществ обеспечивается специализированными белками – обменниками и котранспортерами, которые используют градиенты одних веществ для транспорта других веществ. Клеткам бывает нужно и избавляться от вредных для них веществ, например маленький (110 аминокислот) белок бактерий EmgE обеспечивает резистентность к различным

лекарственным веществам, позволяя двум протонам  $H^+$  входить в клетку в обмен на вывод одной молекулы положительно заряженного лекарственного вещества.

### Вопросы:

1. Приведите примеры ионов и молекул, для которых концентрация внутри клетки отличается от концентрации экстраклеточной среды. Как клетка создает такие градиенты? **(По 0.5 балла за каждый пример, в сумме не более 3 баллов)**
2. Почему для вывода лекарственных веществ из бактерии, белок EmrE должен обменивать молекулу лекарства на несколько протонов? **(1 балл)**
3. В клетках апикального эпителия тонкого кишечника один из белков-котранспортеров (NaPi IIc) использует градиент ионов  $Na^+$  для всасывания ионов фосфата ( $HPO_4^{2-}$ ) из просвета кишечника перенося два иона  $Na^+$  вместе с одним ионом  $HPO_4^{2-}$ . Влияет ли такой транспорт ионов на мембранный потенциал клетки (разность электрических потенциалов между внутренним содержимым клетки и наружной средой)? Принимая, что соотношение концентраций  $[Na^+]$  снаружи и внутри постоянно и составляет 10:1, рассчитайте теоретическое равновесное соотношение концентраций внутри и снаружи клетки для  $HPO_4^{2-}$  **(3 балла)**
4. В клетках эпителия кишечника содержатся также системы котранспорта, переносящие внутрь клетки с одной молекулой глюкозы один ион  $Na^+$  либо два иона  $Na^+$ . Влияет ли такой транспорт на мембранный потенциал клетки? Принимая, что снаружи клетки  $[Na^+]$  в 10 раз больше, чем внутри, и мембранный потенциал клетки  $-70$  мВ, во сколько раз концентрация глюкозы в клетке превысит концентрацию глюкозы в просвете кишечника, если транспорт глюкозы опосредуется первым типом белка-котранспортера? Вторым белком-транспортером? **(5 баллов)**
5. В эпителии какого еще органа необходимо иметь множество белков-обменников и котранспортеров для глюкозы, аминокислот и других важных метаболитов? **(1 балл)**
6. Вы хотите сконструировать наноразмерную машину, которая будет удалять из клетки вредные вещества. За счет чего вы можете сдвинуть равновесие реакции в сторону удаления веществ из клетки? Можно ли достичь результата, используя различное средство такого переносчика к молекулам-мишеням по разные стороны от мембраны? **(2 балла)**

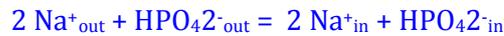
### Решение:

- а) Ионы:  $Na^+$ ,  $K^+$ ,  $Cl^-$ ,  $Ca^{2+}$ ,  $H^+$ , аминокислоты, нуклеотиды, сахара, белки. Базовые градиенты  $Na^+$ ,  $K^+$ ,  $H^+$ ,  $Ca^{2+}$ , в конечном итоге задаются при помощи активного транспорта белками-насосами, затрачивающими энергию гидролиза АТФ для термодинамически невыгодного распределения данных ионов. Градиенты по  $Na^+$  и  $H^+$  часто используются клеткой для т.н. вторичного активного транспорта, сопрягая термодинамически выгодный поток  $Na^+$  или  $H^+$  через мембрану клетки с термодинамически невыгодным потоком сахаров или аминокислот.
- б) Требуется сопряжение энергетически выгодного процесса с энергетически невыгодным. Перенос нескольких протонов на одну молекулу лекарства задает "коэффициент усиления", позволяющий вывести больше молекул лекарства из клетки.
- в) Такой транспорт не связан с суммарным переносом заряда через мембраны клеток.

Другие котранспортеры этого же семейства переносят 3 иона  $Na^+$  на один фосфат, создавая электрический ток через клетку.

“Школьное” решение:

у нас фактически есть реакция:



Соотношение констант скоростей прямой и обратной реакций имеет вид:

$$K_p = \frac{[Na^+_{out}]^2 [HPO_4^{2-}_{out}]}{[Na^+_{in}]^2 [HPO_4^{2-}_{in}]}$$

В состоянии равновесия  $K_p=1$ , и  $\frac{[HPO_4^{2-}_{in}]}{[HPO_4^{2-}_{out}]} = \left(\frac{[Na^+_{out}]}{[Na^+_{in}]}\right)^2 = 100$

“Полное” решение:

Условие равновесия:

$$2\Delta\mu_{Na^+} = -\Delta\mu_{HPO_4^{2-}}, \text{ отсюда}$$

+++++

- d) В обоих случаях наблюдается суммарный электрический ток через мембрану. Условие равновесия в терминах электрохимических потенциалов:

$$n\Delta\bar{\mu}_{Na^+} = -\Delta\bar{\mu}_G, \text{ где } G - \text{ глюкоза, } n - \text{ стехиометрия по } Na^+, 2 \text{ или } 3; \text{ отсюда}$$

$$nRT \ln \frac{[Na^+_{out}]}{[Na^+_{in}]} - nF\Delta\varphi = RT \ln \frac{[G_{in}]}{[G_{out}]} \Rightarrow$$

$$\ln \left(\frac{[Na^+_{out}]}{[Na^+_{in}]}\right)^n - n \frac{F\Delta\varphi}{RT} = \ln \frac{[G_{in}]}{[G_{out}]} \Rightarrow$$

$$\frac{[G_{in}]}{[G_{out}]} = \left(\frac{[Na^+_{out}]}{[Na^+_{in}]}\right)^n \cdot e^{-\frac{nF\Delta\varphi}{RT}} \Rightarrow \text{ при } n=1, \frac{[G_{in}]}{[G_{out}]} \approx 150 \quad ; \text{ при } n=2, \frac{[G_{in}]}{[G_{out}]} \approx 22500$$

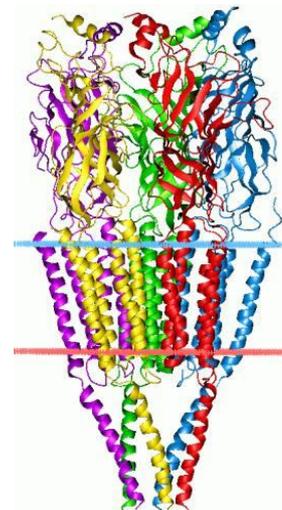
(T=300K)

- e) Прежде всего, почечные каналцы, где из первичного фильтрата нужно забрать обратно все потенциально полезное, прежде чем выводить из организма.
- f) **Существующие градиенты ионов, работая по принципу котранспорта или обменника, можно напрямую задействовать электрический трансмембранный потенциал. Можно также сразу же удалять вещество из внеклеточного пространства, оставив сам процесс транспорта пассивным. Удалять из реакционного объема можно переводя в связанное состояние,**

*разрушая вещество и т.д. Нет, только разного средства недостаточно, поскольку это все равно будет термодинамически пассивный процесс, и с его помощью невозможно создать неравновесное распределение вещества.*

### **Задача 7. Каналы-рецепторы**

Нейроны нервной системы несут на себе различные виды рецепторов. Активация некоторых из них приводит к гиперполяризации мембраны нейрона (увеличению разности электрических потенциалов между внутренним содержимым клетки и наружной средой) и, следовательно, торможению активности, тогда как активация других рецепторов приводит к деполяризации мембраны, активируя нейрон. Так, рецепторы nAChR к ацетилхолину (чувствительные к никотину) при активации ацетилхолином переходят в проводящее состояние и проводят катионы внутрь клетки, вызывая деполяризацию. Родственные им и гомологичные по структуре рецепторы к гамма-аминомасляной кислоте (GABAR) пропускают ионы хлора и вызывают гиперполяризацию нейрона.



#### **Вопросы:**

1. Приведите примеры ионных каналов, присутствующих в мембране нейронов, и опишите способ их активации и влияние на мембранный потенциал нейрона. **(по 1 баллу за каждый полный пример, но не более 3 баллов в сумме)**
2. Чем обеспечивается селективность (избирательность) проницаемости ионных каналов для разных ионов? **(2 балла)**
3. Можно ли (и как) заставить nAChR проводить анионы вместо катионов, а GABAR – катионы вместо анионов **(2 балла)**? Как изменится в этом случае их действие на активность нейрона? **(2 балла)**

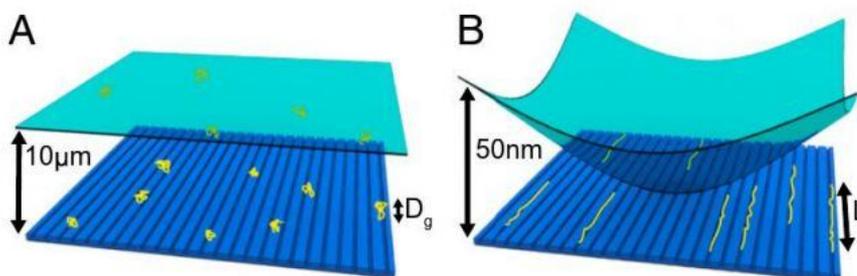
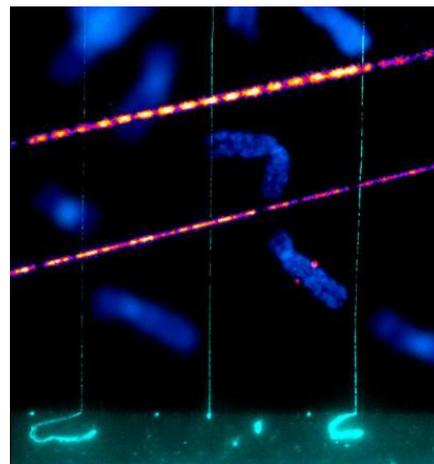
#### **Решение:**

1. Потенциал-зависимые: Na-каналы (чувствительны к деполяризации, приводят к деполяризации), K-каналы (чувствительны к деполяризации, приводят к гиперполяризации), Ca-каналы (чувствительны к деполяризации, приводят к деполяризации). Лиганд-оперируемые: AMPA-рецепторы (активируются глутаматом, приводят к деполяризации), NMDA-рецепторы (активируются глутаматом и глицином либо D-серином + деполяризацией, приводят к деполяризации) + многие другие
2. Селективность обеспечивается остатками аминокислот, экспонированными внутрь поры канала в области т.н. селективного фильтра + диаметром поры канала в этой области. Положительно заряженные остатки в селективном фильтре соответствуют анионным каналам, отрицательно заряженные – катионным каналам (т.е. проницаемым для катионов).
3. При помощи сайт-направленного мутагенеза можно заместить аминокислоты селективного фильтра канала на аминокислоты с противоположно заряженными остатками. Действие на активность должно также измениться на противоположное, с некоторыми оговорками: если канал, ставший катионным, окажется селективным

для ионов  $K^+$ , то он продолжит оказывать гиперполяризующее действие на мембрану нейрона.

### **Задача 8. Укладываем ДНК в наноканавки**

Для исследования генома бывает важно растянуть довольно длинные, окрашенные флуоресцентным красителем отрезки ДНК до почти линейного состояния для последующего визуального исследования под микроскопом. Обычно это довольно сложная задача, потому что молекулы ДНК в растворе приобретают форму клубка и вовсе не хотят растягиваться в узких наноразмерных канальцах! Группа ученых из университета МакГилл (Канада) в 2014 г. опубликовала статью [[doi:10.1073/pnas.1321089111](https://doi.org/10.1073/pnas.1321089111)], в которой описала простой метод растягивания молекул ДНК до почти линейного состояния в узких (27 нм) канавках. Этот метод заключается в следующем: молекулы ДНК помещают в экспериментальную камеру, дно которой покрыто узкими наноканавками. Камера содержит раствор и накрыта покровным стеклом, опирающимся на стенки высотой  $\sim 10$  мкм. В исходном состоянии все молекулы ДНК представляют собой “клубочки”. Затем на поверхностное стекло начинает давить линза объектива микроскопа, прогибая его. Когда расстояние между стеклом и подложкой оказывается порядка десятков нанометров, почти все молекулы ДНК оказываются уложенными в канавки и растянутыми до 90% своей длины.



#### **Вопросы:**

1. Зачем может потребоваться исследовать молекулы ДНК в растянутом состоянии? **(2 балла)**
2. Почему (за счет каких сил) в растворе молекулы ДНК приобретают форму клубка? **(3 балла)**
3. Почему (за счет каких сил) молекулы ДНК при использовании такой методики в конечном итоге оказываются в канавках? **(5 баллов)**
4. Как, используя флуоресцентный краситель, который встраивается между отдельными парами оснований, и меняя температуру рабочего раствора, картировать генетический код молекулы ДНК **(2 балла)**? С каким разрешением это можно делать? **(2 балла)**

#### **Решение:**

1. Для исследования генома и относительно грубого установления нуклеотидной последовательности (ДНК-"отпечатки пальцев"). Можно устанавливать наличие крупномасштабных мутаций, ассоциированных с различными патологиями, таких как делеции значительных участков ДНК, многочисленные повторы и т.д.
2. Для линейных молекул полимеров в растворе термодинамически выгодна конформация в виде т.н. статистического клубка. Основную роль здесь играет энтропийная составляющая, потому что такой клубок может быть составлен большим количеством возможных отдельных конфигураций, т.е. характеризуется большой энтропией
3. При ограничении объема в камере возникает ситуация, когда молекула ДНК внутри канавки имеет больше пространства для различных конформационных конфигураций, чем между стеклом и дном камеры. Так что процесс "заползания" молекул ДНК в канавки также определяется энтропией.
4. Меняя температуру можно добиться плавления (т.е. расхождения цепей) ДНК в области, богатой А-Т парами нуклеотидов при сохранении нативной структуры в областях, богатых Г-Ц парами нуклеотидов, поскольку последние образованы тремя водородными связями, а А-Т пары - двумя. В местах плавления ДНК интеркалирующий краситель будет вымываться в раствор. Таким образом, возникнет "полосатый" паттерн окрашивания молекулы ДНК, что позволяет получать "портрет" нуклеотидной последовательности данной молекулы ДНК. Поскольку молекула исследуется под световым микроскопом, разрешение составляет около 200 нм, т.е. при 0.33 нм на 1 нуклеотид, около 600 пар нуклеотидов.

### ***Задача 9. Зелёные и не совсем зелёные флуоресцентные белки***

В 2008 году Нобелевская Премия по химии присуждена трём учёным: Осаму Шимамуре, Роджеру Тсину и Мартину Шалфи «за открытие и изучение зеленого флуоресцентного белка медузы *Aequorea victoria* (green fluorescent protein, GFP)». Этот белок (рис.1) нашел широчайшее применение в биологии. Впоследствии были открыты и химически синтезированы его разноцветные аналоги: от сине-фиолетового до красного и даже инфракрасного (рис.2).



Рис. 1. Памятник зеленому флуоресцентному белку в США

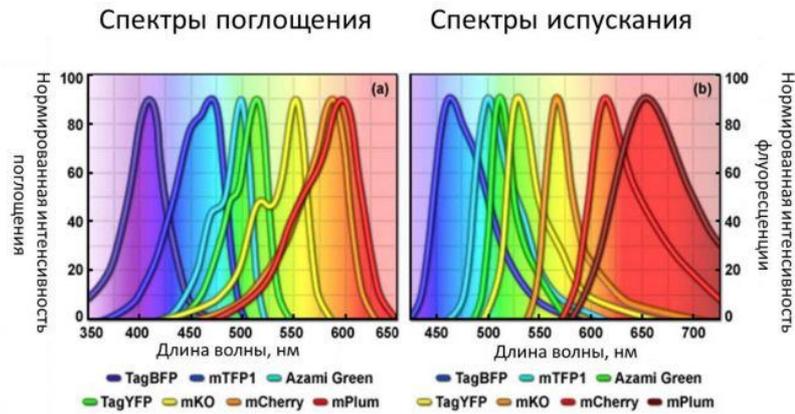


Рис.2. Спектры поглощения (а) и спектры флуоресценции (b) 7 флуоресцентных белков.

### Вопросы:

1. У каких живых организмов (кроме медуз) имеются GFP-подобные белки (не менее 3)?(1 балл)
2. Какова может быть биологическая роль GFP? (1 балл)
3. Какой из GFP-подобных белков, на Ваш взгляд, наиболее перспективен для применения в медицинской диагностике? Почему? (0,5 балла)
4. Почему GFP обладает флуоресценцией? (1 вариант ответа) (0,5 балла) а. GFP содержит в себе ионы металла б. GFP содержит в себе хлорофилл с. GFP содержит в себе молибдоптерин d. GFP содержит в себе хромофорную группу, образованную из аминокислот самого белка
5. Чем обусловлены спектральные различия GFP-подобных белков? (несколько вариантов ответа) (1 балл) а. нарушением встраивания хромофора в белок б. аминокислотным составом с. различиями в конформации хромофора d. отсутствием молекулярного кислорода на первом этапе синтеза хромофора е. взаимодействием с другими белками f. фолдингом
6. Какие из предложенных веществ обладают флуоресценцией? (несколько вариантов ответа) (1 балл) а. квантовые точки б. родамин с. фосфатидилхолин d. гепарин е. триптофан f. ДНК
7. Представьте, что Вы заведуете прекрасно оснащенной лабораторией, в которой имеется флуоресцентный конфокальный микроскоп. К Вам пришел молодой амбициозный студент Петя, для которого Вам необходимо придумать тему дипломной работы.
  - а) Подберите для Пети не менее трёх пар любых молекул в клетке, взаимодействие или колокализацию которых можно изучать с помощью семейства GFP белков методом флуоресцентной конфокальной микроскопии. (3 балла)
  - б) Поясните Пете, какие молекулы можно изучать с помощью GFP, а какие – нет. Свой ответ обоснуйте. Как увидеть молекулы, которые нельзя пометить GFP? (1 балл)
  - с) Поздравляю! Ваш студент защитил диплом на отлично. Вы настолько заинтересовали Петю наукой, что он решил продолжать свое исследование. Однако разрешение

конфокального микроскопа кажется ему недостаточным. Какие существуют методы флуоресцентной микроскопии сверхвысокого разрешения (как минимум два)? (1 балл)

**Решение:**

1. У многих видов моллюсков, нематод, ракообразных, губок, иглокожих и т.д.
2. Хотя бы 1 из предложенных вариантов: вторичный эмиттер в биолюминесцентных системах; защита от солнца для симбиотических водорослей кораллов; окраска; трансфер электронов на различные молекулы-акцепторы; предположительно, защита от АФК
3. например, красный или инфракрасный флуоресцентный белок, так как более коротковолновое излучение хуже проникает в ткани организма.
4. d
5. b, c, f
6. a, b, e
7. а-с) Флуоресцентные белки, слитые в одной рамке считывания с интересующими белками, позволяют наблюдать за их локализацией. Это основное применение GFP.

В клетке белки осуществляют 4 основных типа взаимодействий:

белок-белковое

липид-белковое

НК-белковое (где НК - нуклеиновые кислоты)

взаимодействие с низкомолекулярными агентами (например,  $Ca^{2+}$  с кальмодулином, АТФ с АТФ-синтетазами и пр.)

Поэтому для белок-белкового взаимодействия можно предложить любые, даже хорошо изученные пары белков.

Для изучения локализации липидов можно использовать меченные GFP белки, встроенные в плазматическую мембрану. Для прямой визуализации липидов используют липофильные красители или сольватохромные (меняющие цвет при изменении полярности среды).

Нуклеиновые кислоты тоже могут быть помечены GFP лишь косвенно: с помощью РНК- или ДНК-связывающих белковых доменов. Если необходимо пометить именно ДНК в ядре, то чаще всего используют краситель DAPI (синяя флуоресценция при УФ-облучении).

Для некоторых низкомолекулярных агентов, например, для ионов кальция, есть специальные флуоресцентные зонды. Однако это скорее исключение.

Поэтому в данном случае засчитывается любой ответ, учитывающий вышеизложенные положения.

*Самые известные типы микроскопии сверхвысокого разрешения – PALM и STED, за разработку которых в 2014 году была присуждена Нобелевская премия по химии.*

## Задача 10. СОЭ

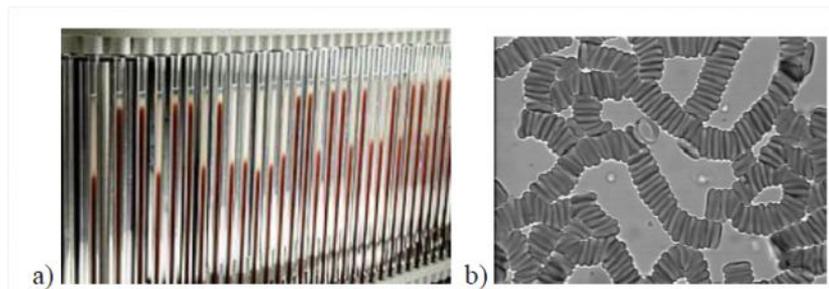


Рис.1.

Вам наверняка делали общий анализ крови, одним из важнейших клинических показателей которого является скорость оседания эритроцитов (СОЭ). Этот простой тест уже почти 100 лет помогает выявлять неполадки в организме, позволяя в большинстве случаев отличить легкую простуду от более серьезных патологий.

1. Каким образом измеряют СОЭ? О чем говорит врачам его величина? **(1 балл)**

Кровь – типичная коллоидная система, главными компонентами которой являются эритроциты – основные переносчики кислорода в организме. Красные кровяные тельца человека имеют дисковидную форму и несущую отрицательный заряд поверхность.

2. Какие основные силы препятствуют слипанию (агрегации) эритроцитов в крови, циркулирующей по организму? **(1 балл)**

Между красными кровяными тельцами, тем не менее, присутствуют и заметные силы притяжения: рассматривая под микроскопом препарат крови, можно заметить, что эритроциты обратимо слипаются друг с другом.

3. Объясните, почему при агрегации эритроцитов преимущественно образуются именно столбики рис. 1b. **(0,5 балла)** Какое поведение эритроцитов при агрегации увидит биолог в микроскоп, если слить препараты крови человека (диаметр эритроцитов ~6,5 мкм) и кролика (диаметр эритроцитов ~8 мкм)? **(0,5 балла)**

4. Поясните, как степень агрегации эритроцитов влияет на СОЭ. **(1 балл)**

Существует две модели, описывающие возникновение агрегации эритроцитов в присутствии белков, полимеров и других наночастиц и приводящие к близким выводам (рис. 2).

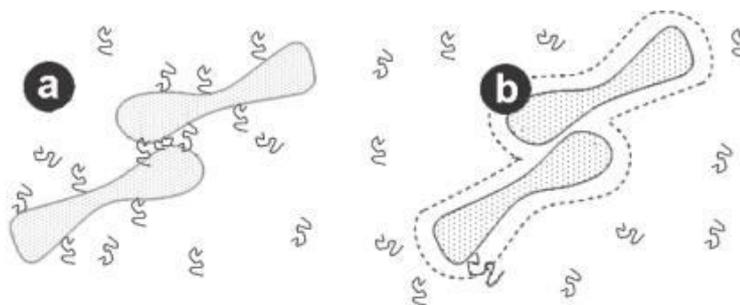


Рис. 2. а) Вспомогательные частицы адсорбируются двумя половинками на поверхностях соседних эритроцитов и таким образом удерживают их.

б) Возле поверхности эритроцитов образуется обедненный слой, поскольку частицы не могут занимать весь объем возле поверхности эритроцита; перекрывание обедненных слоев приводит к увеличению объема, доступного для наночастиц (то есть, суммарная энтропия системы увеличивается за счет увеличения энтропии наночастиц).

5. Почему при болезнях происходит изменение величины СОЭ? **(1 балл)** Какие белки плазмы крови сильнее всего влияют на такое изменение, и как это связано с их концентрациями и размерами? **(1 балл)** Предложите схему эксперимента (желательно с использованием наглядных нанотехнологий), который позволил бы установить, какой именно из двух рассмотренных моделей агрегации соответствуют эти белки. **(1 балл)**

Еще одним параметром, позволяющим оценить тяжесть заболевания, является концентрация С-реактивного белка, которая возрастает при воспалительных процессах.

6. Почему изменения концентрации С-реактивного белка мало сказываются на СОЭ? **(1 балл)** Почему оценка эффективности лечения по измерениям величины СОЭ, а не по измерению концентрации С-реактивного белка может приводить к неверным выводам (каким?)? **(1 балл)**

**Решение:**

**1. Каким образом измеряют СОЭ? Что говорит врачам его величина? (1 балл)**

Иллюстрацией-подсказкой к ответу служит первая картинка из условия. Во взятую кровь добавляют антикоагулянт (препятствует свертыванию, например, цитрат натрия) и помещают в стандартизированную пробирку или капилляр со шкалой. Кровь со временем разделяется на 2 слоя: в нижнем оседают эритроциты, в верхнем остается плазма (см. рис). Через 1 час по шкале измеряют высоту образовавшегося слоя плазмы в миллиметрах – она численно равна СОЭ.

Чаще всего отличие СОЭ от нормы дает повод заподозрить инфекцию или другие патологические процессы в организме. Обычно при болезнях СОЭ повышается: по тому, насколько сильно оно повышено, врач может примерно оценить интенсивность воспалительных процессов. Однако на СОЭ влияет множество разных факторов, поэтому возможны случаи, когда при болезни СОЭ не выше нормы или, наоборот, повышенное СОЭ может обуславливаться непатологическими состояниями.

**2. Какие основные силы препятствуют слипанию (агрегации) эритроцитов в крови, циркулирующей по организму? (1 балл)**

Сила кулоновского отталкивания одноименных зарядов и сила вязкого трения (в организме кровь постоянно перемешивается, вязкое трение при перемешивании способствует разделению агрегатов).

*Между красными кровяными тельцами, тем не менее, присутствуют и заметные силы притяжения: рассматривая под микроскопом препарат крови, можно заметить, что эритроциты обратимо слипаются друг с другом.*

**3. Объясните, почему при агрегации эритроцитов преимущественно образуются именно столбики рис. 1б. (0,5 балла)** Какое поведение эритроцитов при **агрегации** увидит биолог в микроскоп, если слить препараты крови человека (диаметр эритроцитов ~6,5 мкм) и кролика (диаметр эритроцитов ~8 мкм)? **(0,5 балла)**

Очевидно, при агрегации сила притяжения преобладает над отталкиванием. Сила притяжения между эритроцитами будет максимальна при максимальной площади контакта, поэтому, эритроцит будет сильнее удерживаться, если «прилипнет» в продолжение столбика, а не к его боковой поверхности.

При **агрегации** (не гемолизе и не агглютинации с участием антигенов) человеческие эритроциты будут преимущественно слипаться с человеческими, а кроличьи – с кроличьими. Лишь при таком способе агрегации суммарная площадь свободной поверхности будет минимальна. Если же представить цепочку из чередующихся маленьких и больших эритроцитов, то при таком расположении часть «внутренней» поверхности больших эритроцитов остается свободной.

К сожалению, многие участники решили (не думая) воспользоваться неправильными чужими ответами на эти 2 вопроса.

#### 4. Поясните, как степень агрегации эритроцитов влияет на СОЭ. (1 балл)

Масса столбика пропорциональна количеству эритроцитов в столбике, а сопротивление жидкости при осаждении столбика пропорционально площади сечения столбика (т.е., площади одного эритроцита). Поэтому столбики с большим числом эритроцитов (при большей степени агрегации) будут осаждаться быстрее – СОЭ возрастет.

Существует две модели, описывающие возникновение агрегации эритроцитов в присутствии белков, полимеров и других наночастиц и приводящие к близким выводам (рис. 2).

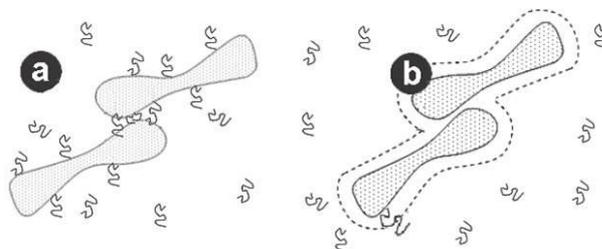


Рис. 2. а) Вспомогательные частицы адсорбируются двумя половинками на поверхностях соседних эритроцитов и таким образом удерживают их. б) Возле поверхности эритроцитов образуется обедненный слой, поскольку частицы не могут занимать весь объем возле поверхности эритроцита; перекрывание обедненных слоев приводит к увеличению объема, доступного для наночастиц (то есть, суммарная энтропия системы увеличивается за счет увеличения энтропии наночастиц).

#### 5. Почему при болезнях происходит изменение величины СОЭ? (1 балл) Какие белки плазмы крови сильнее всего влияют на такое изменение, и как это связано с их концентрациями и размерами? (1 балла)

Как мы уже знаем из ответа на первый вопрос, при болезнях обычно происходит увеличение СОЭ, которое (как следует из ответа на предыдущий пункт) можно связать с увеличением степени агрегации эритроцитов. Используя любую из предложенных моделей, мы приходим к выводу, что увеличение степени агрегации эритроцитов должно произойти при увеличении концентрации белков в плазме крови. Несложно найти в сети Интернет, что при заболеваниях в крови возрастает концентрация **белков острой фазы** (фибриноген, иммуноглобулины, С-реактивный белок и другие), которые помогают организму справляться с болезнью – именно они несут главную ответственность за повышение СОЭ при болезнях.

При одинаковом количестве белков, лучше всего «связывать» эритроциты (повышать СОЭ) должны, во-первых, большие белки (больше контакт с эритроцитом по первой модели, больше объем обедненного слоя по второй модели), во-вторых – ассиметричные белки («палочки», а не «шарики»). С другой стороны, сильнее всего будут повышать СОЭ те белки, чей вклад в увеличении концентрации белков острой фазы максимален. Поэтому наибольший эффект на увеличение СОЭ оказывает **фибриноген** (за ним идут глобулины, у которых меньше размер, менее ассиметричная форма, меньше вклад в суммарное изменение концентраций).

*Предложите схему эксперимента (желательно с использованием наглядных нанотехнологий), который позволил бы установить, какой именно из двух рассмотренных моделей агрегации соответствуют эти белки. (1 балла)*

Очевидное различие моделей заключается в наличии/отсутствии молекул белков между эритроцитами в стопках. Значит, необходимо как-то отследить, есть ли, например, фибриноген между эритроцитами в столбике. Для этого к его молекуле можно «пришить» маленькую светящуюся метку, например, квантовую точку (не перекрывающуюся по спектру с красным гемоглобином, дополнительно, при этом, убедившись, что помеченный белок изменяет СОЭ аналогично немодифицированному), и посмотреть «на просвет» стопку эритроцитов. Чтобы убедиться, что меченые белки между эритроцитов попали не случайно, можно провести контрольный опыт с «разъединенными» белком и квантовой точкой (при этом интенсивность свечения метки в стопке эритроцитов должна быть значительно ниже, если верна первая модель, и такая же, если вторая).

**6. Почему изменения концентрации С-реактивного белка мало сказываются на СОЭ? (1 балл)**  
*Почему оценка эффективности лечения по измерениям величины СОЭ, а не по измерению концентрации С-реактивного белка может приводить к неверным выводам (каким?)? (1 балл)*

Ответ на этот вопрос частично кроется в ответе на предыдущий. В отличие от фибриногена, С-реактивный белок меньше, более симметричен и, главное, в большинстве случаев его концентрация в крови гораздо меньше концентраций других белков. Поэтому его вклад в увеличение СОЭ сильно маскируется на фоне вклада других белков острой фазы.

Образовавшаяся в начале болезни повышенная концентрация фибриногена приходит к норме довольно медленно (большое время жизни фибриногена в крови). Поэтому повышенное СОЭ после курса лечения может ошибочно говорить о наличии воспалительных процессов (и неэффективности лечения). Время жизни в крови С-реактивного белка существенно меньше, поэтому он может точно показать, насколько уменьшается в ходе лечения воспалительный процесс – т.е. оценить эффективность выбранного метода лечения.

Также стоит отметить, что поскольку СОЭ зависит от множества факторов (например, от вязкости крови), в относительно редких случаях это также может приводить к неверным выводам.

## Химия

### Задача 1. Химическое эмодзи

Наш старый добрый знакомый, агент, осуществляющий шпионаж в нанобиологическо-исследовательском федеральном инновационном городе-агломерации (НИФИГА), выяснил структуры крайне важных для задач Центра изомерных соединений **X** и **Y**.

Для шифрования структуры этих соединений он использовал специальные пиктограммы - эмодзи, установив соответствующее расширение для браузера. Соединение **X** в полученной шифровке выглядит так:



А соединение **Y** так:



1. Попробуйте установить возможные структуры **X** и **Y**. (6 баллов)
2. Существуют ли еще вещества, изомерные **X** и **Y**:
  - а) относящиеся с ними к одному классу соединений; (1 балл)
  - б) обладающие схожей биологической активностью? (1 балл)
3. Какую пространственную структуру будут иметь **X** и **Y** в водном растворе?(0.5 балла)
4. Объясните, почему в случае обработки соляной кислотой в жестких условиях соединений **X** и **Y** продукты реакции отличаются только по одной позиции. (1.5 балла)

#### Решение:

1. С учетом того, что шпионаж осуществляется в нанобиологическом центре, а также того факта, что соединения, структуры которых высылал агент в предыдущий раз (смотри задачу "пептидное какуро" заочного тура наноолимпиады 2014 г.), – олигопептиды, можно предположить, что и в этот раз мы имеем дело с пептидами. Понятно, что для каждой пиктограммы (или их комбинации, что утяжеляет ситуацию) необходимо подобрать соответствующую аминокислоту. Значительно упрощает ситуацию знание того факта, что соединения **X** и **Y** являются изомерами, что говорить о схожести их аминокислотных последовательностей. Например, изображение сыра или героя анимационного сериала "Чип и Дейл спешат на помощь" Рокфóра (англ. Monterey Jack) или Рокки - самца мыши, имеющего сильнейшую, непреодолимую тягу к сыру, однозначно указывает на остаток аминокислоты тирозин, чье название произошло именно от названия данного пищевого продукта. Более сложная ситуация возникает с наличием в обоих случаях за скобками эмодзи в виде недовольного, кислого выражения лица. С учетом того, что изображение злакового и листовенного растения встречается в обоих соединениях, можно догадаться, что "кислая" мордочка кодирует дефиницию кислота в случае аспарагиновой (изображение спаржи) и

глутаминовой (глютен, клейковина как группа белков, обнаруженных в ряде злаков) кислот. Шелковое платье и рубашка из аналогичного материала указывают на серин. Английское обозначение ДНК (DNA) отсылает к гистидину, чье название произошло от гистонов - широкого класса ядерных белков. Цифровые обозначения соответствуют молярным массам соответствующих аминокислот, данных с точностью до второго знака после запятой. Белый квадрат в противовес творчеству Казимира Малевича подразумевает под собой или лейцин, или изолейцин (от др.-греч. λευκός - белый).

Отсюда структуры **X** и **Y** с учетом невозможности проведения различия между лейцином и изолейцином:

**X:** Asp-Tyr-Leu-Gln-Ser-Hys или Asp-Tyr-Ile-Gln-Ser-Hys,

**Y:** Asn-Leu-Ser-Glu-Hys-Tyr или Asn-Ile-Ser-Glu-Hys-Tyr.

(по 1,5 баллу за структуру, всего 6 баллов)

2.

а) Вещества, изомерные **X** и **Y** и являющиеся гексапептидами, конечно, существуют: их легко получить путем перестановки искомым аминокислот между соответствующими позициями (например, перестановка местами остатков гистидина и серина в соединении **X**).

б) биологическая активность пептидов крайне трудно предсказуема, исходя из их первичной аминокислотной последовательности: это означает, что однозначный ответ на данный вопрос представить невозможно. (по 1 баллу за каждый пункт, всего 2 балла)

3. Образование регулярной вторичной структуры в крайне небольших пептидах **X** и **Y** не происходит, что означает их нахождение в водном растворе в развернутом состоянии, которое стабилизируется случайными (заранее непредопределенными) внутри- и межмолекулярными связями. (0,5 балла)

4. Аспарагин и глутамин в условиях полного гидролиза пептидов гидролизуются до аспарагиновой и глутаминовой кислот, соответственно. Тем самым, отличие продуктов гидролиза по одной позиции будет объясняться наличием в растворах лейцина и изолейцина. (1,5 балла)

## **Задача 2. Синтез неорганических наночастиц**

Для получения этих нанообъектов использовали бесцветные кристаллы **X**, растворимые в воде. При нагревании на воздухе вещество **X** разлагается, превращаясь в желтый порошок **Y** и выделяя летучие продукты с резким специфическим запахом, среди них – летучую жидкость **A** (содержит 27.6% кислорода по массе), неограниченно растворимую в воде. Из 15.16 г **X** может быть получено 8.92 г **Y**. Далее 66.9 мг **Y** растворили в 1 мл органической кислоты **B** (содержит 76.6% углерода по массе и обесцвечивает бромную воду).

Реакционную смесь нагрели до 90 °С в атмосфере азота. После того, как все вещество **Y** перешло в раствор, увеличили температуру и ввели в реакционную смесь по каплям рассчитанное количество триметилсилилсульфида. Через несколько минут наблюдали образование наночастиц **Z**.

1. Определите формулы веществ **A**, **B**, **X**, **Y**, **Z**, запишите уравнения всех описанных реакций. **(6 баллов)**
2. Рассчитайте массу триметилсилилсульфида, который ввели в реакцию. Предложите, каким образом можно варьировать размер наночастиц. Как называют подобные нанобъекты и где их используют? **(3 балла)**
3. Какое тривиальное название имеет вещество **X**? **(1 балл)**

**Решение:**

**X** –  $\text{Pb}(\text{CH}_3\text{COO})_2 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ , свинцовый сахар

**Y** –  $\text{PbO}$

**Z** –  $\text{PbS}$

**A** – ацетон  $\text{C}_3\text{H}_6\text{O}$

**B** – олеиновая кислота  $\text{C}_{17}\text{H}_{33}\text{COOH}$

Размер квантовых точек варьируют, меняя концентрации, температуру, скорость добавления реагентов

**Задача 3. Наночастицы в материале**

Для получения наночастиц **X** в неорганическом материале **Y** исследователь использовал простые вещества **A** и **B**. Вещество **A** медленно переходит в раствор под действием концентрированной соляной кислоты, а вещество **B** растворяется в соляной кислоте только при одновременном пропускании газа **C**. При смешении этих растворов через некоторое время выделяется окрашенный осадок **D**, содержащий 59.4% элемента **A** и 24.6% элемента **B** по массе.

1. В какой неорганический материал **Y** вводят осадок **D**? В каких условиях происходит образование наночастиц? Какую окраску придают они материалу и чем она обусловлена?

Приведите историческое название материала. **(3 балла)**

2. Определите, что представляют собой вещества **A**, **B**, **C**, если известно, что **A** реагирует с **C** с образованием летучей жидкости, которая при взаимодействии с перегретым водяным паром образует белый порошок, содержащий 78.8% элемента **A** по массе. **(3 балла)**
3. Приведите уравнения всех упомянутых реакций. Определите, сколько атомов **A** в садке **D** приходится на один атом **B**? **(4 балла)**

**Решение:**

**A** – олово

**B** – золото

**C** – хлор

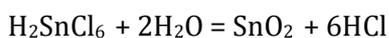
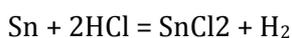
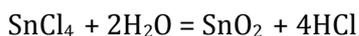
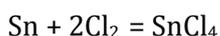
D – диоксид золота, допированный золотом («кассиев пурпур»). Его состав примерно  $\text{Au} \cdot 4\text{SnO}_2$ , мольное соотношение  $\text{Sn} : \text{Au} = 4 : 1$ .

X – наночастицы золота

Y – стекло

Историческое название – золотой рубин

Белый порошок –  $\text{SnO}_2$ .



#### **Задача 4. Наноалмазы**

Наноалмазы – углеродный материал, состоящий из частиц алмаза с характерным размером 6 нм. Частицы считаются сферическими, и характерный размер – это диаметр.

1. А как делают наноалмазы на практике? Прокомментируйте возможность использования следующих методов:

- а) дробление ювелирного алмаза;
- б) восстановление  $\text{CO}_2$  на катализаторе при комнатной температуре;
- в) взрыв углеродосодержащих веществ;
- г) обработка углеродной сажи высоким давлением ( $10^4$  бар) при температуре жидкого азота.

Ответ начните со слов «да» или «нет», таким образом, обозначьте свое отношение к возможности использования метода, а затем объясните свою точку зрения – на это вам дается не более 10 слов.

**(по 1 баллу за каждый комментарий)**

Наноалмазы постепенно входят в нашу жизнь. Перед вами продукт массового производства: грифели для карандашей компании Митсубиси, содержащие наноалмазы.

Каждый грифель содержит 4 миллиарда наноалмазов.

2. Грифель из наноалмаза – это композиционный материал, или композит. На примере нашего грифеля объясните, чем композит



отличается от химического соединения? В ответе должно быть не более двух предложений. **(1 балл)**

3. Какой недостаток грифеля исправляется за счет добавки наноалмазов? (Ответьте одним словом!) **(0.5 балла)**

4. Глядя на коробку, оцените среднее расстояние между центрами частиц наноалмаза в грифеле. **(2.5 балла)**

5. Сколько наноалмазов находится в слове «алмаз», если длина линии, изображающей это слово, составляет 15 см при ширине 0.25 мм? Если грифель использовать полностью, минимальная длина линии той же толщины, что и в слове «алмаз», составит 6 км. **(1 балл)**

**Решение:**

1. а) Нет, можно, но слишком дорого. (б) Нет, получится графит, а не алмаз. (в) Да, при взрыве устанавливаются высокие температуры и давления, нужные для возникновения алмаза. г) Нет, образуется графит, температура синтеза – низкая.

2. Грифель состоит из графита и алмаза, не связанных химическими связями. При образовании химического соединения обязательно возникают новые химические связи.

3. Ломкость.

4. На коробке внизу есть размеры грифеля. Разумно принять, что 0.5 мм – это диаметр грифеля (для радиуса тонкого грифеля это слишком много), 60 мм – его длина.

Объем одного грифеля составляет.

$$V = \pi r^2 L = \pi \times (0.25)^2 \times 60 = 11.78 \text{ mm}^3 = 11.78 \times 10^{-9} \text{ m}^3$$

На один наноалмаз приходится объем

$$v = 11.78 \times 10^{-9} \text{ m}^3 : 4 : 10^9 = 2.9 \times 10^{-18} \text{ m}^3$$

Положим, что наноалмазы находятся в центре кубов объема  $v$ . Расстояние между центрами соседних алмазов составит

$$r = \sqrt[3]{2.9 \times 10^{-6}} = 1.4 \times 10^{-6} \text{ m}$$

5. Нам необходимо определить объем линии в слове «алмаз». Длина  $l=15$  см и ширина линии  $w=0,25$  мм нам известны. Остается определить толщину. По условию задачи, грифель способен прочертить линию длиной в 6 км. Причем, эта длина названа минимальной. Поскольку толщина линии  $h$  фиксирована (она такая же, как в слове «алмаз») минимальная длина  $L = 6$  км соответствует максимальной ширине линии. Эта максимальная ширина соответствует диаметру не заточенного грифеля,  $d = 0.5$  мм. Следовательно, мы можем определить  $h$

$$h \times d \times L = 0.5 \times 10^{-3} \times 6 \times 10^3 \times h = V_{\text{грифеля}} = 11.78 \times 10^{-9} \text{ м}^3$$

$$h = 3.9 \times 10^{-9} \text{ м}$$

Объем грифеля взят из решения (4). Объем линии, составляющей слово «алмаз»

$$h \times w \times l = 3.9 \times 10^{-9} \times 0.25 \times 10^{-3} \times 0.15 = V_{\text{линии}} = 1.5 \times 10^{-13} \text{ м}^3$$

Количество алмазов в линии

$$\frac{V_{\text{линии}}}{V_{\text{грифеля}}} \times 4000000000 = \frac{1.5 \times 10^{-13} \text{ м}^3}{11.78 \times 10^{-9} \text{ м}^3} \times 4000000000 = 0.51 \times 10^5 \text{ наноалмазов}$$

### Задача 5. Нанокатализ

25 лет тому назад в научной литературе появилось новое понятие – «нанокатализ».

Известно, что катализаторы – это вещества, увеличивающие скорость химических реакций и не расходующиеся в ней. Если каталитическое действие производят частицы размером в 1-100 нм, то говорят о нанокатализе и нанокатализаторе. Часто катализаторами являются металлы: золото, платина, железо и т.п.

1. Объясните, почему при измельчении металла-катализатора каталитическое действие одного и того же количества металла усиливается. Ответ должен содержать не более 10 слов без учета предлогов. **(1 балл)**

2. Каталитическое действие оказывает не вся металлическая частица, а особые, небольшие ее части, активные центры, состоящие часто из одного-двух атомов. Пусть металлический катализатор имеет форму кубика. Мы разделили этот кубик на 100 одинаковых более мелких кубиков. Скорость каталитической реакции в расчете на грамм катализатора выросла при этом:

а) приблизительно в 5 раз;

б) приблизительно в 100 раз.

В каких точках кубиков находятся каталитические центры в каждом случае? **(3 балла)**

3. Реакция  $\text{CO} + 1/2 \text{O}_2 = \text{CO}_2$  катализируется кластерами золота. Кластеры имели форму полушарий, закрепленных на подложке, сделанной из оксида титана. Скорость реакции (в расчете на грамм золота) увеличивалась пропорционально уменьшению квадрата радиуса полушария. Где располагались каталитические центры? **(2 балла)**

4. В минуту на одном каталитическом центре металла диссоциирует на атомы 6000 молекул  $\text{A}_2$ . Катализатор имеет форму кубиков. При разбиении каждого кубика на 100 более мелких кубиков скорость химической реакции возрастает в 100 раз. У нас есть 1 г металла, его плотность равна  $d = 10.5 \text{ г/см}^3$ . Каково должно быть ребро кубика для того, чтобы в минуту на металле-катализаторе прореагировало  $10^{-2}$  моля  $\text{A}_2$ ? **(4 балла)**

**Решение:**

- 1) При измельчении катализатора увеличивается доля атомов в поверхностном слое. На них происходит катализ. (10 слов, не считая предлогов)
- 2) ) Активные центры находятся на поверхности кубиков. Есть три характерных расположения: – в вершинах, на ребрах и на гранях куба.

При расположении в вершинах деление одного кубика на сто кубиков приведет к увеличению числа активных центров в сто раз:

$$n = \frac{8 \text{ вершин} \times 100}{8 \text{ вершин}} = 100$$

$n$  – отношение числа активных центров после деления к числу активных центров до деления.

Посчитаем  $n$  при других расположениях При расположении на ребрах: объем кубика, полученного в результате деления

$$v = \frac{R^3}{100}$$

длина ребра этого куба

$$l = \left( \frac{R^3}{100} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{R}{4,64}$$

Увеличение длины всех ребер равно (приблизительно!) увеличению числа активных центров

$$n = \frac{R}{4.64} \times 100 \div R = 21.6$$

Если активные центры расположены на гранях

$$n = \left( \frac{R}{4.64} \right)^2 \times 100 \div R^2 = 4.64$$

В нашем случае активные центры расположены на гранях и в вершинах, соответственно.

- 3) Можно предположить два возможных расположения центра: на поверхности полусферы радиуса  $R$  или на окружности с радиусом  $R$ , где полусфера граничит с подложкой.

В первом случае, количество активных центров,  $m$ , в расчете на грамм катализатора при уменьшении  $R$  растет пропорционально  $1/R$

$$m \sim \frac{1}{2/3 \times \pi \times R^3} \times 2\pi R^2 \sim \frac{1}{R}$$

Первый множитель пропорционален количеству полусфер, второй – количеству активных центров на одной полусфере.

Во втором случае  $m$  растет при уменьшении радиуса полусферы пропорционально  $1/R^2$ :

$$m \sim \frac{1}{2/3 \times \pi \times R^3} \times 2\pi R \sim \frac{1}{R^2}$$

Первый множитель пропорционален количеству полусфер, второй – количеству активных центров на одной окружности.

В каталитической реакции окисления CO каталитические центры располагались на окружности, в местах контакта катализатора и подложки.

4) В минуту должно прореагировать  $10^{-2}$  моля, т.е.  $6 \cdot 10^{21}$  молекул. Каталитические центры расположены в вершинах куба (см. задачу 2). Необходимое количество кубиков

$$k = \frac{6 \times 10^{21}}{8 \times 6 \times 10^3} = 1.25 \times 10^{17}$$

В знаменателе – число молекул, реагирующих на активных центрах одного кубика в минуту. У нас есть

$$V = \frac{1 \text{ г}}{10.5 \text{ г} \times \text{см}^3} = 9.5 \times 10^{-2} \text{ см}^3$$

металла. Объем одного кубика и его ребро равны

$$v = \frac{9.5 \times 10^{-2}}{1.25 \times 10^{17}} = 7.6 \times 10^{-19} \text{ см}^3; l = \sqrt[3]{v} = 0.91 \times 10^{-6} \text{ см} = 9.1 \text{ нм}$$

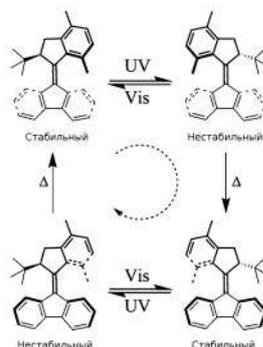
### **Задача 6. Молекулярные моторы**

Исследования искусственных моторов, совершающих работу на молекулярном уровне, представляют большой интерес для нанотехнологий. Такие объекты играют важную роль в развитии движущихся молекулярных систем, таких как наномшины. Важнейшим преимуществом молекулярных моторов является способность превращать энергию в направленное движение. Для этого моторы могут использовать энергию химических превращений, света или переноса электрона.

Напряженные алкены являются одним из наиболее многообещающих классов синтетических молекулярных моторов благодаря их способности вращаться относительно центральной двойной связи C=C при фотохимической изомеризации. Такое вращение

включает две быстрых фотохимических стадии и две медленных термических стадии инверсии спирали.

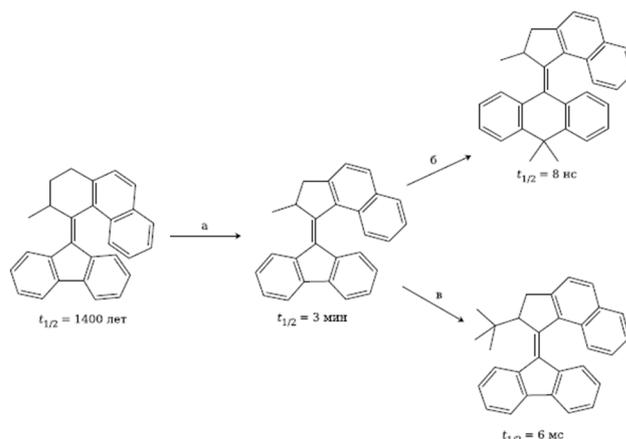
Для одного из моторов схема превращений приведена на рисунке ниже.



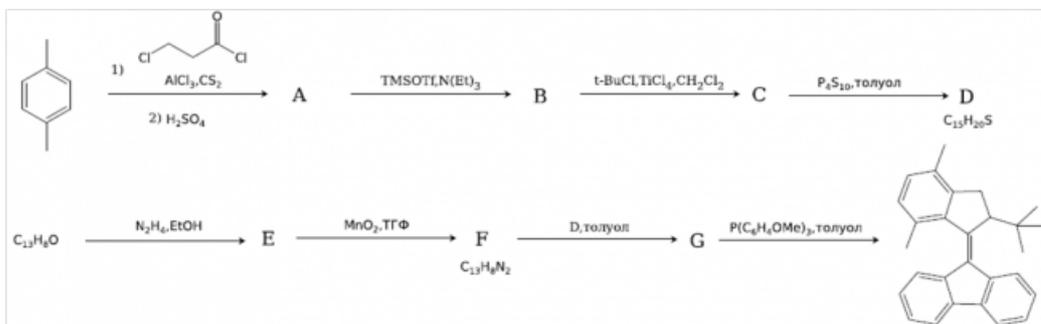
1. В зависимости от типа заместителей при двойной связи скорости вращения мотора может очень сильно отличаться. Как вы думаете, для чего могут быть полезны быстрые моторы, а для чего медленные? **(2 балла)**

На схеме ниже изображен ряд молекулярных моторов и периоды полупревращения ( $t_{1/2}$ ) для термической инверсии спирали при комнатной температуре.

2. Предложите объяснение разницы  $t_{1/2}$  для всех трех стрелок. **(3 балла)**



Недавно новый молекулярный мотор был синтезирован по следующей схеме:



3. Расшифруйте схему превращений, если известно, что соединение А не содержит хлора, а  $^1\text{H}$ - ЯМР спектр  $\text{C}_{13}\text{H}_8\text{O}$  содержит только 4 пика, причем все они лежат в области 7-8 м.д. **(8 баллов)**.

4. Для нового мотора был проведен ряд измерений  $t_{1/2}$  для инверсии спирали при различных температурах. Известно, что инверсия спирали – реакция первого порядка. По данным, приведенным в таблице, рассчитайте энергию активации термической стадии и  $t_{1/2}$  при 25 °C. (2 балла)

Температура, °C	$t_{1/2}$ , мс
20	2.9
30	1.4
40	0.7

**Решение:**

1. Как медленные так и быстрые моторы могут представлять научный интерес. На первыхудобнее исследовать механизмы процесса и проверять новые гипотезы. Быстрые моторы болееполезны для прикладного применения. Во-первых, быстрые моторы реагируют на внешневоздействие значительно раньше, т.е. имеют меньшее время отклика. Более того, посколькумощность мотора пропорциональна угловой скорости, быстрые моторы могут быть значительномоощнее. (по 1 баллу за каждый тип)

2. Разница в скорости вращения в первую очередь будет определяться энергией активациитермической стадии, и соответственно высотой энергетического барьера инверсии. Рассмотримпо очереди все стрелки.

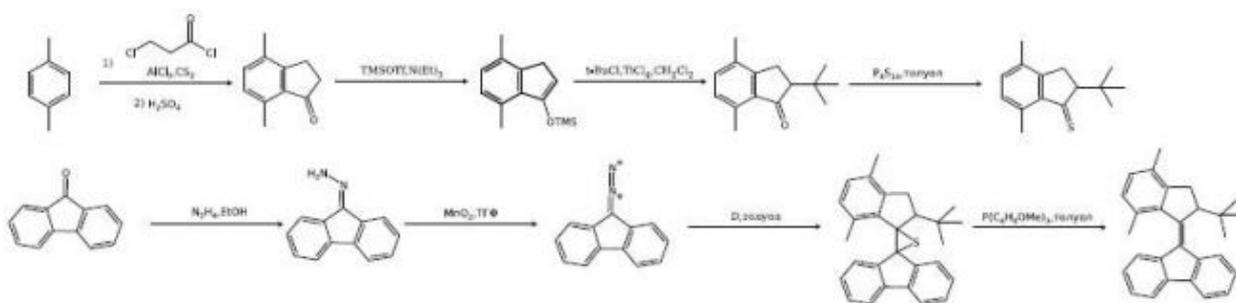
а) При уменьшении размера верхнего кольца увеличивается расстояние между ароматическимикольцами, что приводит к уменьшению энергии переходного состояния и, соответственно,значительному уменьшению энергии активации реакции.

б) С увеличением размера кольца в нижней системе растут энергии как нестабильнойконформации (за счет роста отталкивания между метильной группой и ароматической системойинижних колец), энергия переходного состояния также растет, но в меньшей степени, что опятьже приводит к уменьшению энергии активации.

в) Сильное увеличение размеров алкильного заместителя приводит к значительному ростуэнергии нестабильной конформации и, соответственно уменьшению энергии активации.

(по 1 баллу за объяснение)

3.



(по 1 баллу за структуру)

Для нового мотора был проведен ряд измерений  $t_{1/2}$  для инверсии спирали при различных температурах.

4. Задание можно решать либо по двум точкам, либо графически, строя уравнение Аррениуса в координатах  $\ln(k)$  от  $1/T$ . Рассчитанная энергия активации = 54.0 кДж/моль,  $t_{1/2}=2.0$  мс. (2 балла за расчет, 1 балл за числа).

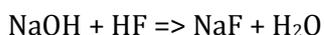
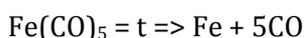
### Задача 7. Железный шар

Искусные кузнецы гномов творили из металла чудеса: оружие и доспехи, тончайшие украшения и огромные металлические статуи. Каждый год они собирались на турнир и показывали свои лучшие изделия. Кобдик также решил поучаствовать в турнире, создав небывалое творение из железа.

Для своего шедевра он сначала изготовил полый стеклянный шар, внутренним диаметром 0.5 м. Далее Кобдик откачал воздух и наполнил шар парами карбонила железа при температуре 70 °С и давлении 0.02 атм. После этого Кобдик герметично закрыл шар и прокалил его при температуре 200 °С. Когда давление в шаре стабилизировалось, юный гном открыл шар, выкачал из него газ и быстро заполнил шар аргоном. Затем Кобдик поместил шар в раствор фторида натрия и удалил стеклянную матрицу. В итоге получилась идеальная металлическая сфера, из которой Кобдик выкачал аргон, наполнил её водородом до давления 1 атм и понёс на соревнование.

1. Напишите уравнения протекающих реакций. **(3 балла)**
2. Рассчитайте толщину стенок сферы. **(3 балла)**
3. Рассчитайте подъёмную силу (в г), которую развивает данная сфера при комнатной температуре. **(2 балла)**
4. Насколько устойчиво будет изделие Кобдика на воздухе? Почему? **(1 балл)**

**Решение:**



$$\text{Объём сферы } \frac{4\pi R^3}{3} = 0,0654 \text{ (м}^3\text{)} = 65,44 \text{ (л)}$$

$$pV = nRT$$

$$0,02 \cdot 101325 \cdot 0,0654 = n \cdot 8,314 \cdot 473, \text{ откуда } n \text{ равно } 0,0337 \text{ (моль)}$$

$$\text{Масса железа равна } 1,888 \text{ г (} m = A_r(\text{Fe}) \cdot n \text{)}$$

$$\text{Объём железа равен } V = 1,888 / 7,87 = 0,24 \text{ (см}^3\text{)}$$

$$\text{Площадь поверхности сферы рассчитывается по формуле } S = 4 \cdot \pi R^2 = 0,785 \text{ м}^2 = 7850 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$\text{Толщина слоя железа равна } V/S = 0,24 / 7850 = 3,057 \cdot 10^{-5} \text{ (см)} = 0,3057 \text{ (мкм)} = 305,7 \text{ нм}$$

Сфера наполнена водородом. 1 моль водорода в воздухе создаёт подъёмную силу в 27 г. ( $M_r(\text{возд}) = 29$ ,  $M_r(\text{H}_2) = 2$ ) Подъёмная сила зависит от температуры воздуха и, например, для 0°С она будет равна 78,88 г. После вычитания массы оболочки шара – 77 г. Принимаются и другие варианты ответа, если они грамотно учитывают температуру.

Железный шар будет неустойчив, так как железо является активным металлом и будет окисляться. Если толщина защитной оксидной плёнки для пассивации компактного куска железа будет больше, чем толщина собственно плёнки железа в шаре – то он окислится полностью. Если меньше – то он окислится с поверхности.

### Задача 8. Концентрированные белки

В неорганической химии зачастую работают с 1 М – 5 М растворами кислот и щелочей, в то время как в биохимии обычны концентрации белков менее 10 мкМ.

1. Сможет ли биохимик приготовить 1 М раствор белка<sup>1</sup> в воде или каком-нибудь другом растворителе? А приготовить 5 М раствор каких-либо сферических наночастиц? Ответы обоснуйте. (4 балла)

Растворы белков с максимально возможными концентрациями используются природой там, где требуется наибольшая функциональность в минимальном объеме.

2. Приведите примеры двух таких растворов в человеческом организме, если их локальные объемы различаются более чем в 10<sup>8</sup> раз. Как называются белки, образующие эти два раствора, и зачем понадобилось их концентрировать? Почему организмом при этом используются именно растворы, а не твердые материалы? (3.5 балла)

Функции и размеры белков могут определять их концентрацию в организме. Например, расстояния между молекулами фибриногена в плазме крови подобраны близкими к их длине для того, чтобы при повреждениях сосудов быстро образовывать трехмерную сетку фибрина («забывающую» поврежденный сосуд, см. рисунок) и останавливать кровотечение.

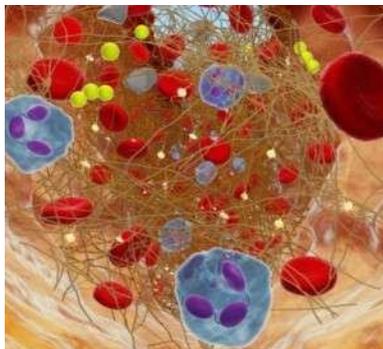


Рис. Трехмерная сетка фибрина

3. Оцените молярную (моль/л) и массовую (г/л) концентрации фибриногена в плазме, если его молекула имеет длину около 50 нм и содержит около 3 000 аминокислотных остатков (считать, что фибриноген целиком состоит из аминокислот). (2.5 балла)

При расчетах можно использовать следующие справочные данные:

- средняя молекулярная масса аминокислотного остатка 110 Да;
- средняя плотность белков 1.38 г/мл.

<sup>1</sup> Белком, согласно ИЮПАК, будем считать пептид, содержащий не менее 50 аминокислотных остатков.

#### Решение:

1. Сможет ли биохимик приготовить **1М** раствор белка в воде или каком-нибудь другом растворителе? А приготовить **5М** раствор каких-либо сферических наночастиц? Ответы обоснуйте. (4 балла)

1) Наночастицы любого вещества, будь то белок или фуллерен, обладают массой и размером. При этом, наночастицы, как любое твердое вещество, сложно сжимаемы; если объем 1 моля наночастиц окажется больше 1 литра, то, дополнительно добавив растворитель, мы уже не сможем уместить получившийся раствор в 1 л. Оценим концентрации частиц в твердых веществах, состоящих из плотно упакованных наночастиц: чтобы была возможность приготовить растворы, эти концентрации должны оказаться строго меньше заданных в условии.

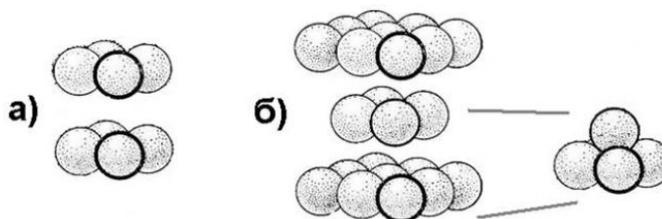
Очевидно, что чем меньше частицы, тем больше их может поместиться в 1 литре.

Поскольку для одной частицы  $V = m/\rho$ , то наименьший занимаемый объем при фиксированной плотности будет у частицы с минимальной массой. Значит, наибольшей концентрацией (из расчета на 1 л) будет обладать белок с минимальной массой частиц, т.е. с минимально возможным для белка числом остатков из самой легкой аминокислоты. Это будет (Gly)<sub>50</sub>, масса одного остатка Gly равна 75 – 18 = 57 Да, всего белка 57·50 + 18 ≈ 2,9 кДа (полным баллом также оценивался расчет массы «усредненного» белка из 50 аминокислот с массой 110·50 + 18 ≈ 5,5 кДа).

Рассмотрим 1 л белка (Gly)<sub>50</sub> (10<sup>3</sup> см<sup>3</sup>). В качестве оценки сверху рассчитаем мольную концентрацию белка в самом себе, грубо считая, что его молекулы полностью заполняют весь объем без пустот (при наличии пустот число частиц и, соответственно, их концентрация будет меньше). Количество белка в 1 литре тогда составит:  $\rho \cdot V / M = 1,38 \cdot 10^3 / 2900 = 0,48$  моль, то есть 1М раствор белка даже теоретически невозможно приготовить ни в воде, ни в любом другом растворителе.

2) Повторим ту же схему решения для сферических **наночастиц**. В этом случае, ни масса ни плотность частицы не известны, однако в решении они и не понадобятся, поскольку мы можем сразу оценить минимальный размер (диаметр) частиц – **1 нм**.

Если сферические частицы упакованы «как кубики» (рис. а, центры частиц лежат в вершинах куба с ребром 1нм), то на одну частицу приходится объем (1·10<sup>-9</sup>)<sup>3</sup> м<sup>3</sup>, в 1 л (1·10<sup>-3</sup> м<sup>3</sup>) будет содержаться  $1 \cdot 10^{-3} / (1 \cdot 10^{-9})^3 = 1 \cdot 10^{24}$  частиц или  $1 \cdot 10^{24} / N_A = 1 \cdot 10^{24} / 6,02 \cdot 10^{23} = 1,66$  моль частиц.



Однако, если в упаковке рис (а) каждый второй слой «сдвинуть» так, чтобы он попал в лунки предыдущего слоя, то частицы упакуются плотнее (рис. б). При этом расстояние между слоями уменьшится в 1,4 раза (от 2R до R; R – высота квадратной пирамиды, все стороны которой равны 2R, рис. б). Соответственно концентрация увеличится до  $1,66 \cdot 1,4 \approx 2,3M$ , но и так не сможет достигнуть 5M. Полным баллом оценивались работы с любым вариантом упаковки сферических наночастиц.

Значит, 5M раствор наночастиц нельзя получить даже теоретически.

2. Приведите два примера, где в человеческом организме содержатся такие концентрированные растворы, если их локальные объемы различаются более чем в 10<sup>8</sup> раз.

Как называются белки, образующие эти два раствора, и зачем понадобилось их концентрировать? Почему организмом при этом используются именно растворы, а не твердые материалы? (3,5 балла)

а) **Гемоглобин** в эритроците – концентрация до 370 г/л.

б) Попробуем логически вывести вторую «емкость» с концентрированным раствором белка. Поскольку объем пропорционален третьей степени линейного размера, размеры «емкостей» будут отличаться более чем в  $(1 \cdot 10^8)^{1/3} \approx 500$  раз. При размере эритроцита около 10 мкм объем второй «емкости» будет либо меньше **20** нм, либо больше **5** мм. Первый вариант сравним с размерами самих белков (заведомо исключаются органеллы клеток, сложно подобрать что-либо разумное). Поскольку большинство растворов белков прозрачны (гемоглобин – скорее исключение, связанное с наличием атома переходного металла), то нужно представить себе, где в человеческом теле нужны прозрачные «емкости», чьи размеры > 5 мм. Это – хрусталики в глазах (диаметр ~9-10 мм) (с натяжкой также можно назвать роговицу и белок альбумин). Используя Интернет несложно найти, что основной белок хрусталика - **кристаллин** (массовая доля превышает 50%).

Чтобы объяснить, зачем понадобились именно концентрированные растворы белков, необходимо понять, какие функции выполняют эритроциты и хрусталики, и представить, почему они не смогут эффективно работать, если их содержимое разбавить водой, или же оно затвердеет (закристаллизуется).

с) Максимально возможные концентрации белков были нужны чтобы:

- **эритроцит**: увеличить емкость по кислороду и углекислому газу (уменьшить затраты на транспорт газов в организме)

- **хрусталик**: получить максимальный показатель преломления в минимальном объеме. Это позволяет уменьшить габариты хрусталика и, соответственно, глаза, а также улучшает его физико-биологические характеристики (например, скорость и легкость фокусировки).

д) В твердых телах молекулы вещества «фиксированы» около своих положений, поэтому, в отличие от растворов, твердые тела не могут так же обратимо свободно менять свою форму, и имеют гораздо более низкую реакционную способность. Скорость реакций с газами для эритроцита критична, поэтому его нельзя заполнить твердым гемоглобином. Возможность изменения формы эритроцита также важна для увеличения скорости газообмена: «протискиваясь» сквозь узкие капилляры, эритроцит может приобретать форму бочонка, обеспечивая при этом более тесный контакт внутреннего содержимого и стенок капилляров, т.о. ускоряя газообмен с окружающими тканями. При этом эритроцит может «катиться» как гусеница танка по капилляру (раствор внутри эффективно перемешивается), что также ускоряет процессы газообмена.

Для хрусталика же пластичность формы дает возможность фокусировать взгляд на разных расстояниях.

3. Оцените молярную (моль/л) и массовую (г/л) концентрации фибриногена в плазме, если его молекула имеет длину около 50 нм и содержит около 3 000 аминокислотных остатков (считать, что фибриноген целиком состоит из аминокислот). (2,5 балла)

При решении этого пункта допускалось любое оценочное упрощение/предположение о взаимном расположении молекул. Например, что все молекулы находятся в центре

прямоугольных параллелепипедов со сторонами 50x50x100 нм. Тогда на одну молекулу приходится объем  $50 \cdot 10^{-9} \cdot 50 \cdot 10^{-9} \cdot 100 \cdot 10^{-9} = 2,5 \cdot 10^{-22} \text{ м}^3$  или  $2,5 \cdot 10^{-19} \text{ л}$ . В 1л плазмы будет  $1/(2,5 \cdot 10^{-19}) = 4 \cdot 10^{18}$  молекул фибрина, что составит  $4 \cdot 10^{18}/N_a = 6,6 \cdot 10^{-6}$  моль/л или **6,6  $\mu\text{M}$** .

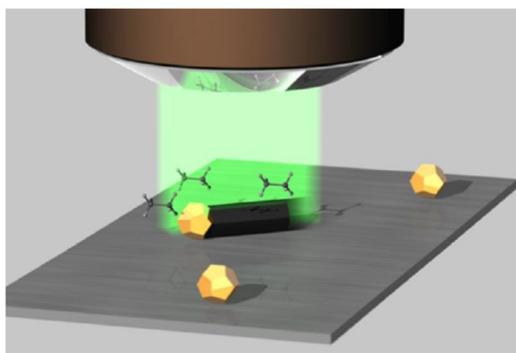
Массовая концентрация составит  $n \cdot M = 6,6 \cdot 10^{-6} \cdot 110 \cdot 3000 = 2,2 \text{ г/литр}$ .

Если же при решении считать, что на одну молекулу приходится куб с ребром 50нм, то все концентрации получатся в 2 раза больше.

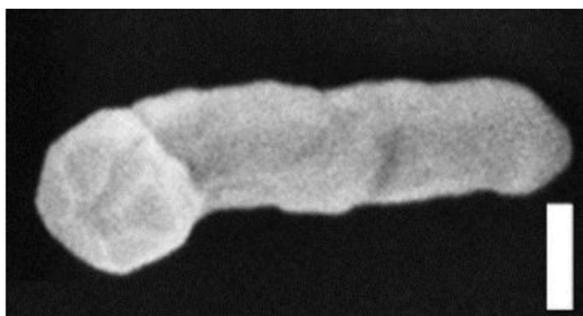
Важно отметить, что, несмотря на довольно грубые приближения и допущения, мы получаем очень близкий к реальности результат: в норме литр плазмы содержит **2 – 4 г** фибриногена.

### **Задача 9. Фотосинтез полупроводника**

Рост наночастиц предложено контролировать с помощью лазера. Для синтеза полупроводниковых нанонитей, состоящих из простого вещества X, используют лазерное облучение наночастиц золота диаметром 140 нм, нанесенных на мембрану из нитрида кремния и находящихся в атмосфере аргона с 0.2% содержанием газа Y.



1. Установите формулы веществ X и Y, если известно, что Y – бинарное соединение, содержащее 96.00% элемента X по массе. (2 балла)
2. Напишите уравнение реакции, происходящей при синтезе. Предположите роль лазерного излучения. Как называется данный метод синтеза наночастиц? (2 балла)



Электронное изображение нанонити X  
(длина вертикального отрезка 100 нм)

3. Оцените длину нанонитей и число атомов X в ней. Плотность вещества X найдите самостоятельно. (3 балла)

**Решение:**

1. Массовая доля второго элемента в Y мала, можно предположить, что это – водород. Обозначим формулу гидрида XH<sub>n</sub>. Массовая доля X дана с высокой точностью, поэтому стоит в расчетах брать нецелые атомные массы. Из уравнения

$$\frac{M(X)}{M(X) + 1.008n} = 0.9600$$

находим: M(X) = 24.19n. При n = 3 получаем M(X) = 72.57 г/моль, что соответствует германию. Брутто-формуле GeH<sub>3</sub> соответствует молекулярная формула Ge<sub>2</sub>H<sub>6</sub> – дигерман. X – Ge, Y – Ge<sub>2</sub>H<sub>6</sub>.

Другие варианты решения, такие как C<sub>4</sub>H<sub>2</sub> и др., не удовлетворяют условию на массовую долю с требуемой точностью. Например, в C<sub>4</sub>H<sub>2</sub> ω(C) = 4·12.01/(4·12.01+2·1.008) = 0.9597 вместо 0.9600.

2. Роль лазерного излучения состоит в разогреве частицы катализатора, на поверхности которой происходит разложение дигермана:



Такой метод получения наночастиц называется химическое осаждение из газовой фазы (CVD – chemical vapor deposition). В данном случае химическое осаждение оказывается лазерно-индуцированным.

3. Из рисунка видно, что нанонить можно приближенно представить лежащим на боку цилиндром с диаметром 100 нм и высотой около 400 нм. Зная объем цилиндра, можно найти его массу (плотность германия – 5.323 г/см<sup>3</sup>), количество вещества и число частиц:

$$N(\text{Ge}) = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A = \frac{\rho V}{M} N_A = \frac{\rho \frac{\pi d^2}{4} h}{M} N_A =$$

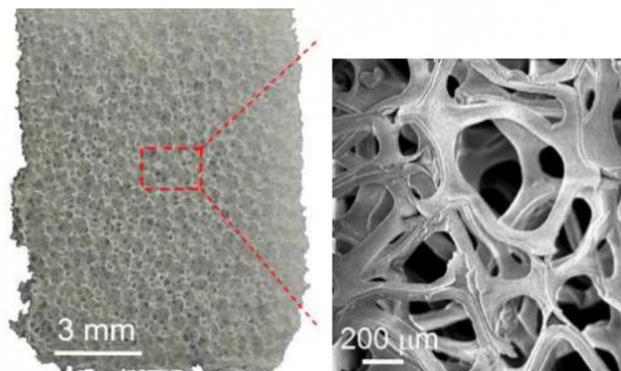
$$= \frac{5.323 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (100 \cdot 10^{-7})^2 \cdot 400 \cdot 10^{-7}}{72.57} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} = 1.4 \cdot 10^8 = 140 \text{ миллионов}$$

В качестве правильной принималась любая оценка порядка сотен миллионов атомов.

**Задача 10. Пористый изолятор**

Пористый материал на основе бинарного вещества X был приготовлен следующим образом. Твердое вещество Y с высоким содержанием водорода (19.6% по массе) испарили при нагревании, и пары (они оказались легче кислорода) выдерживали в течение часа над нагретым до 1000 °C пористым никелем. Полученный материал покрыли тонким слоем полимера (ПММА), затем выдержали в 3 M соляной кислоте, тщательно промыли дистиллированной водой и отожгли в течение часа при 700 °C для удаления полимера.

Получили сверхлегкий пористый материал с плотностью 1.6 мг/см<sup>3</sup>, обладающий очень низкой электропроводностью.

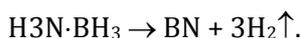


Внешний вид материала X и его микроструктура

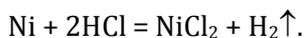
1. Установите формулы веществ X и Y, напишите два уравнения реакций, происходящих при синтезе материала. **(3 балла)**
2. При каких температурах этот материал будет легче воздуха (давление нормальное)? **(2 балла)**
3. Считая радиусы атомов, входящих в состав X, примерно равными 0.1 нм, оцените долю пустого пространства в полученном материале. **(3 балла)**
4. Предложите еще два способа синтеза вещества X. Пригодны ли они для синтеза наноматериалов? **(2 балла)**

**Решение:**

1. На  $n$  атомов водорода массой  $1.008n$  а.е.м. в веществе Y приходится  $1.008n/0.196 - 1.008n = 4.135n$  а.е.м. массы остальных элементов. При  $n = 6$  получаем  $4.135 \cdot 6 = 24.81$  а.е.м., что соответствует фрагменту BN. Брутто-формула Y –  $\text{BNH}_6$ . Пары Y легче кислорода, поэтому брутто-формула совпадает с молекулярной. Y – аддукт  $\text{H}_3\text{N} \cdot \text{BH}_3$ . При его сильном нагревании происходит последовательное отщепление трех молекул водорода и образуется полимерный нитрид бора BN (бинарное вещество X).



Трехмерная полимерная сетка нитрида бора заполняет пустоты в пористой подложке никеля, которая затем растворяется в соляной кислоте:



2. Плотность пористого материала мало зависит от температуры, но от нее зависит плотность воздуха, которая при охлаждении увеличивается:

$$\rho(\text{возд}) = \frac{PM}{RT} = \frac{101.3 \cdot 29}{8.314T} > 1.6 \text{ г/л},$$

откуда  $T < 221$  К. Разумеется, температура должна при этом быть выше температуры кипения азота и кислорода. При этих условиях плотность пористого нитрида бора будет меньше плотности воздуха.

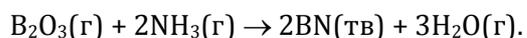
3. Каждый атом бора или азота занимает объем около  $4/3\pi r^3 = 4/3\pi \cdot (10^{-8} \text{ см})^3 = 4.2 \cdot 10^{-24} \text{ см}^3$ . Возьмем  $1 \text{ см}^3$  материала массой  $1.6 \text{ мг}$  и найдем общее число атомов:

$$N_{\text{ат}} = 2N_{\text{BN}} = 2N_{\text{AV}}(\text{BN}) = 2 \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot 1.6 \cdot 10^{-3} / 24.8 = 7.7 \cdot 10^{19}.$$

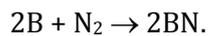
Общий объем всех атомов:  $V = 7.7 \cdot 10^{19} \cdot 4.2 \cdot 10^{-24} = 3.2 \cdot 10^{-4} \text{ см}^3$ ,

что составляет 0.032% от объема материала. Следовательно, доля пустот равна  $100\% - 0.032\% = 99.97\%$ .

4. Наночастицы нитрида бора можно получить химическим осаждением из газовой фазы путем восстановления оксида бора аммиаком:



Нанотрубки нитрида бора синтезируют разными способами, самый простой из которых – прямое взаимодействие простых веществ. Для этого бор выдерживают в атмосфере азота при 1000 °С в присутствии железа, играющего роль катализатора роста трубок:



## Математика

### Задача 1. Знакомство с боросференом $B_{40}$

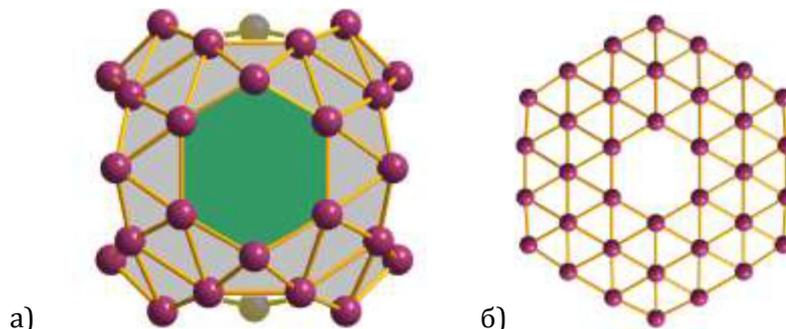


Рис.1. а) Боросферен  $B_{40}$  – недавно открытая каркасная молекула бора, родственник углеродных фуллеренов; б) борофен  $B_{36}$  – двумерный кластер бора, имеющий общие структурные элементы как с листами бора (борные аналоги графена), так и с боросференами.

Совсем недавно, в 2014 году, учеными был открыт боросферен  $B_{40}$  – первый борный родственник фуллеренов. Как и фуллерен, он представляет собой каркасную молекулу, но имеет несколько иной принцип построения каркаса. В боросферене  $B_{40}$  все атомы собраны в ленты из равносторонних треугольников, которые разделяют «большие» многоугольные грани, при этом каждый атом бора принадлежит одному из таких больших многоугольников (рис. 1 а).

Известно, что две из больших многоугольных граней боросферена представляют собой правильные шестиугольники, расположенные друг напротив друга.

**1.** Рассчитайте, сколько вершин содержит второй тип больших многоугольников, а также число таких многоугольников в  $B_{40}$ . **(1.5 балла)**

Молекула боросферена содержит два типа вершин:  $x$  пятивалентных вершин (в которых сходятся по 5 ребер) и  $y$  четырехвалентных (сходятся по 4 ребра).

**2.** Воспользовавшись теоремой Эйлера, найдите  $x$  и  $y$ , а также рассчитайте число треугольников ( $F_3$ ) в  $B_{40}$ . **(4 балла)**

Разрезав часть ребер, молекулу боросферена можно разъединить на две одинаковые плоские половинки, которые будут совпадать сами с собой при повороте на  $180^\circ$  вокруг трех взаимно перпендикулярных осей.

**3.** Постройте эти половинки, если известно, что их можно вырезать из молекулы борофена  $B_{36}$ . Поясните или нарисуйте, как их складывать\*, чтобы получилась молекула боросферена  $B_{40}$ . **(3 балла)**

Расчеты показывают, что у боросферена может существовать двумерный изомер.

**4.** Постройте все возможные варианты такого изомера, если он одновременно обладает следующими свойствами:

- совмещается сам с собой при повороте на  $180^\circ$
- его внешний периметр не содержит общих ребер с шестиугольниками и является выпуклым многоугольником

- получается минимально необходимым изменением структуры борофена В36 (рис. 1 б).

Ответ поясните. (3.5 балла)

\*Подсказка: можно вырезать и складывать бумажные половинки боросферена.

**Решение:**

1. Рассчитайте, сколько вершин содержит второй тип больших многоугольников, а также число таких многоугольников в В40. (1.5 балла)

Поскольку нет ни одной вершины, которая не принадлежала бы большим многогранникам и известно, что шестиугольникам принадлежит  $6 \cdot 2 = 12$  из 40 вершин, то второму типу многогранников принадлежат 28 оставшихся вершин. Таким образом, вторым типом могут быть либо квадраты (7 штук), либо семиугольники (4 штуки), либо 14-ти угольники (2 штуки). Первый вариант противоречит рисунку 1а условия, по которому видно, что второй тип больших циклов содержит более 4х атомов. Третий вариант подразумевает «блинообразную» структуру молекулы с макроциклами на торцах, что также противоречит рисунку 1а условия.

2. Воспользовавшись теоремой Эйлера, найдите  $x$  и  $y$ , а также рассчитайте число треугольников ( $F_3$ ) в В40. (4 балла)

Вариант 1.

Запишем теорему Эйлера для боросферена:

$40 - E + F_3 + 2 + 4 = 2$ , где  $V = 40$  – число вершин, а  $E$  – число ребер,  $2 + 4$  – общее число шести- и семиугольников. Упрощая, получаем:  $F_3 = E - 44$ .

Запишем общее число вершин через  $4x$  и  $5y$  координированные вершины:  $x + y = 40$ . Общее число треугольных граней мы также можем записать через тип вершин. Каждая  $4x$  координированная вершина принадлежит трем треугольным граням (и одному многоугольнику), а каждая  $5y$  координированная – 4м треугольным (и одному многоугольнику), при этом каждой треугольной грани принадлежит 3 вершины:

$$F_3 = x \cdot 3/3 + y \cdot 4/3 = x + 4y/3$$

Общее число ребер мы также можем записать через тип вершин (из каждой вершины первого типа выходит 4 ребра, каждое из них принадлежит двум вершинам, всего таких вершин  $x$ ; аналогично рассуждаем для  $y$  5ти координированных вершин):

$$E = x \cdot 4/2 + y \cdot 5/2 = 2x + 2,5y.$$

Решая систему из полученных четырех уравнений, находим:

$$F_3 = 48, E = 92, x = 16, y = 24.$$

Вариант 2.

Запишем общее число ребер и граней через количество граней разного типа.

$$\text{Грани } F = F_6 + F_7 + F_3 = 2 + 4 + F_3 = 6 + F_3$$

Ребра  $E = 6F_6/2 + 7F_7/2 + 3F_3/2 = 6 \cdot 2/2 + 7 \cdot 4/2 + 3F_3/2 = 20 + 3F_3/2$  – каждая грань  $F_n$  содержит  $n$  ребер, но каждое ребро принадлежит 2 граням.

Тогда теорема Эйлера принимает вид:  $40 - 20 - 3F_3/2 + 6 + F_3 = 2$ .

Упрощая, находим  $F_3 = 48$ . Тогда число ребер составляет  $E = 20 + 3 \cdot 48/2 = 92$

Общее число ребер мы можем записать через тип вершин (из каждой вершины первого типа выходит 4 ребра, каждое из них принадлежит двум вершинам, всего таких вершин  $x$ ; аналогично рассуждаем для  $y$  5ти координированных вершин):

$$E = x \cdot 4/2 + y \cdot 5/2 = 2x + 2,5y = 92.$$

Подставляя  $x = 40 - y$ , получаем  $x = 16$  и  $y = 24$ .

*Разрезав часть ребер, молекулу боросферена можно разъединить на две одинаковые плоские половинки, которые будут совпадать сами с собой при повороте на  $180^\circ$  вокруг трех взаимно перпендикулярных осей*

**3.** Постройте эти половинки, если известно, что их можно вырезать из молекулы борофена  $B_{36}$ . Поясните или нарисуйте, как их складывать, чтобы получилась молекула боросферена  $B_{40}$ . (3 балла)

При разъединении многогранника по ребрам его половинка будет содержать ровно  $1/2$  его вершин – 20 атомов бора. Разглядывая рис. 1а условия, нужно увидеть и «развернуть» симметричную по трем взаимно перпендикулярным поворотным осям симметрии плоскую половинку (рис. а).



Рис. а) Вырезанная половинка  $B_{20}$ , две поворотных оси симметрии показаны пунктиром, третья – перпендикулярна плоскости рисунка. б) Боросферен  $B_{40}$ . с) Боросферен: вид спереди, сзади и с правого бока (проиллюстрирован способ соединения 2-х половинок с образованием 7-миугольника).

Чтобы получить боросферен (рис. б), две половинки надо изогнуть так, чтобы образовались связи В-В над и под шестиугольником (образующиеся при этом треугольники закрашены оранжевым и желтым на рис. с), затем повернуть друг относительно друга на  $90^\circ$  и «состыковать» как показано на рис. с справа. При таком способе соединения двух половинок в местах склейки получатся 4 семиугольника.

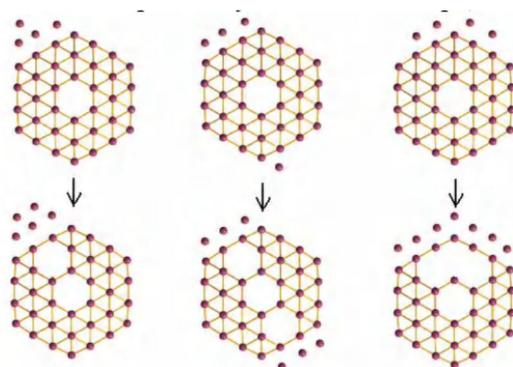
*Расчеты показывают, что у боросферена может существовать двумерный изомер.*

**4.** Постройте все возможные варианты такого изомера, если он одновременно обладает следующими свойствами: – совмещается сам с собой при повороте на  $180^\circ$  – его внешний периметр не содержит общих ребер с шестиугольниками и является выпуклым многоугольником – получается минимально необходимым изменением структуры борофена  $B_{36}$  (рис. 1б). Ответ поясните. (3.5 балла)

Формула боросферена –  $B_{40}$ , а борофена –  $B_{36}$ , то есть, к последнему необходимо «добавить» 4 атома. Оси симметрии борофена проходят через противоположные вершины шестиугольника, а также через середины его противоположных сторон. Значит, по условию симметричности, добавляемые атомы могут помещаться либо на одну из осей симметрии и/или попарно на одинаковом расстоянии от нее.

Сначала добавим 3 атома бора на внешнее ребро шестиугольника, при этом периметр плоского кластера бора остается выпуклым многоугольником. Добавление необходимого по условию 4-го атома приведет к нарушению правильности периметра.

Чтобы все-таки соблюсти данное условие, не нарушая условие симметричности, нам необходимо либо достраивать дополнительный ряд из 2-х атомов на этом же ребре («достав» один дополнительный атом изнутри структуры борофена так, чтобы получившийся шестиугольник не граничил с периметром и не нарушал симметрии получающегося кластера, минимально необходимое изменение структуры), либо добавить 3 атома вдоль ребра с противоположной стороны от начального построения («достав» два дополнительных атома изнутри структуры борофена так, чтобы получившиеся шестиугольники не граничили с периметром и не нарушали симметрии получившего кластера).



Третий вариант (приведенный на рисунке выше) можно уже не рассматривать, так как в этом случае потребуются перестановка уже трех атомов из структуры борофена. Таким образом, условию удовлетворяет только первый вариант.

## Задача 2. Магия треугольников

		A	B	?	C
	•				
атомов на ребре	1	$m$	$m(m+1)$		$n$
пример	1	2	$2(2+1) = 6$		8
атомов в кластере	1	$T_m$			$T_n$
двойное представление		$T_m = \left[ \begin{matrix} \{1\}_x \\ \{0\}_{x-1} \end{matrix} \right]_2$			$T_n \xrightarrow{2} \left[ \begin{matrix} \{1\}_y \\ \{0\}_{y-1} \end{matrix} \right]_2$ $y(x)=?$
Если $r = 0,18$ нм и $10 < D < 100$ нм, то чему равно $T_n$ ?					

Рис. 1. **A** – нанокластер в виде правильного треугольника, ребро которого содержит **m** атомов (показан пример для **m = 2**); **B** – нанокластер, составленный из двух одинаковых правильных треугольников, ребро каждого из которых составлено из **m+1** нанокластеров **A**; **C** – нанокластер в виде правильного треугольника, ребро которого содержит **n** атомов.

1. Запишите общую формулу для числа атомов (**T<sub>m</sub>**) в нанокластере **A** с длиной ребра в **m** атомов. (1.5 балла)
2. Докажите, что для любого **m** (рис. 1) из атомов нанокластера **B** можно без остатка построить треугольник **C**. (3.5 балла)
3. Докажите, что если число атомов в треугольнике **A** (**T<sub>m</sub>**) можно записать в двоичном виде как последовательность, состоящую из **x** единиц и затем (**x-1**) нулей подряд ( $[\{1\}_x\{0\}_{x-1}]_2$ ), то и записанное в двоичном виде число атомов в соответствующем треугольнике **C** (**T<sub>n</sub>**) тоже будет иметь вид  $[\{1\}_y\{0\}_{y-1}]_2$ . (5 баллов) Чему при этом будет равно **y**? (0.5 балла)
4. Найдите все возможные **T<sub>n</sub>**, если известно, что размер неодимового нанокластера **C** (как диаметр описанной окружности **D**) лежит в диапазоне 10 - 100 нм. Радиус атома неодима **r = 0.18 нм**. (3.5 балла)

**Решение:**

1. Запишите общую формулу для числа атомов (**T<sub>m</sub>**) в нанокластере **A** с длиной ребра в **m** атомов. (1.5 балла)

Число атомов в кластере **A** – это так называемое «треугольное число»:

$$T_m = 1 + 2 + 3 + \dots + m = \sum_1^m k = \frac{m(m+1)}{2}.$$

2. Докажите, что для любого **m** (рис. 1) из атомов нанокластера **B** можно без остатка построить треугольник **C**. (3.5 балла)

Запишем общее число атомов в **B** (по условию, это удвоенное произведение двух последовательных треугольных чисел):

$$2T_m T_{m+1} = 2 \frac{m(m+1)}{2} \cdot \frac{(m+1)(m+2)}{2} = \frac{m(m+1)^2(m+2)}{2} = \frac{(m^2 + 2m)(m^2 + 2m + 1)}{2}$$

Преобразуя полученное выражение, можно заметить, что оно также является треугольным числом с аргументом  $n = m^2 + 2m$ :

$$2T_m T_{m+1} = \frac{(m^2 + 2m)((m^2 + 2m) + 1)}{2} = T_{m^2 + 2m} = T_n$$

То есть, из атомов нанокластера **B**, отвечающего произвольному **m**, всегда можно без остатка построить треугольник **C** с ребром  $n = m^2 + 2m$

3. Докажите, что если число атомов в треугольнике А ( $T_m$ ) можно записать в двоичном виде как последовательность, состоящую из  $x$  единиц и затем  $(x-1)$  нулей подряд  $[\{1\}_x\{0\}_{1-x}]_2$ , то и записанное в двоичном виде число атомов в соответствующем треугольнике С ( $T_n$ ) тоже будет иметь вид  $[\{1\}_y\{0\}_{1-y}]_2$ . (5 баллов) Чему при этом будет равно  $y$ ? (0.5 балла)

Переведем число атомов в А из двоичной записи в десятичную. Для этого представим двоичную запись в виде суммы степеней числа 2:

$$[\{1\}_x\{0\}_{x-1}]_2 = \left[ 1 \cdot \sum_{k=x}^{2x-1} 2^{k-1} + 0 \cdot \sum_{k=1}^{x-1} 2^{k-1} \right]_{10} = \left[ \sum_{k=x}^{2x-1} 2^{k-1} \right]_{10}$$

(всего в двоичной записи имеем  $2x-1$  разряда, из них разряды от 1-го до  $(x-1)$ -го занимают нули, а с  $x$ -го до  $(2x-1)$ -го – единицы).

Упростим полученное выражение, используя формулу суммы геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=x}^{2x-1} 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{2x-1} 2^{k-1} - \sum_{k=1}^{x-1} 2^{k-1} = 1 \cdot \frac{2^{2x-1} - 1}{2 - 1} - 1 \cdot \frac{2^{x-1} - 1}{2 - 1} = 2^{2x-1} - 2^{x-1} = 2^{x-1}(2^x - 1)$$

Поскольку число атомов в треугольнике А является одновременно и треугольным числом, то

$$T_m = \frac{m(m+1)}{2} = 2^{x-1}(2^x - 1). \text{ Тогда } m = 2^x - 1.$$

Ранее мы нашли, что на ребре нанокластера С, отвечающего данному нанокластеру А, содержится  $n = m^2 + 2m$  атомов, следовательно:

$$n = m^2 + 2m = (2^x - 1)^2 + 2(2^x - 1) = 2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 + 2 \cdot 2^x - 2 = 2^{2x} - 1$$

и

$$T_n = \frac{(2^{2x} - 1)(2^{2x} - 1 + 1)}{2} = 2^{2x-1}(2^{2x} - 1)$$

Поскольку  $[\{1\}_x\{0\}_{x-1}]_2 = 2^{x-1}(2^x - 1)$ , то  $2^{2x-1}(2^{2x} - 1) = [\{1\}_{2x}\{0\}_{2x-1}]_2$ .

То есть, общее число атомов в нанокластере С можно записать в виде  $[\{1\}_{2x}\{0\}_{2x-1}]_2$ , значит,

$$y = 2x.$$

4. Найдите все возможные  $T_n$ , если известно, что размер неодимового нанокластера С (как диаметр описанной окружности D) лежит в диапазоне 10 - 100 нм. Радиус атома неодима  $r = 0.18$  нм. (3.5 балла)

Пересчитаем граничные условия: Диаметр описанной вокруг правильного треугольника окружности равен

$$D = \frac{4rn}{\sqrt{3}} \text{ то есть, } n = \frac{\sqrt{3}D}{4r}$$

(При выводе диаметра описанной окружности мы пренебрегли малыми поправками, появляющимися при строгом рассмотрении радиуса описанной окружности как суммы радиуса окружности, проведенной через центры атомов, лежащих в вершинах треугольника, и радиуса атома, поскольку  $0,18 \text{ нм} \ll 10 \text{ нм}$ ).

Если  $10 \text{ нм} < D$ , то  $n > 24$  и  $T_n > 300$

Если  $D < 100 \text{ нм}$ , то  $n < 240$  и  $T_n < 28920$

То есть,  $24 < n < 240$  и  $300 < T_n < 28290$ .

Возможны два подхода к поиску всех возможных неодимовых кластеров с числом атомов

$T_n = \left[ \left\{ 1 \right\}_y \left\{ 0 \right\}_{y-1} \right]_2$  удовлетворяющих условию  $300 < T_n < 28290$ :

### Вариант 1.

Для перебора можно воспользоваться утверждением п.3 условия вкупе с найденным ранее соотношением  $y = 2x$ :

$x = 2$ :  $1102 \Rightarrow 11110002$  ( $= 120, 120 < 300$ )

$x = 3$ :  $111002 \Rightarrow 111111000002$  ( $= 2016, 300 < 2016 < 28920$ )

$x = 4$ :  $11110002 \Rightarrow 1111111100000002$  ( $= 32640, 32640 > 28920$ )

### Вариант 2.

$x = 1$   $T_n(x) = 2^{2-1}(2^2 - 1) = 2 \cdot 3 = 6$

$x = 2$   $T_n(x) = 2^{2 \cdot 2 - 1}(2^{2 \cdot 2} - 1) = 2^3 \cdot 15 = 120$

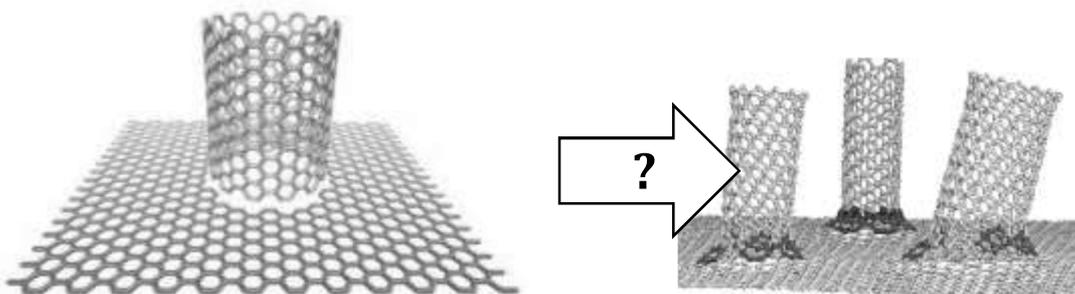
$x = 3$   $T_n(x) = 2^{2 \cdot 3 - 1}(2^{2 \cdot 3} - 1) = 2^5 \cdot 63 = 2016$

$x = 4$   $T_n(x) = 2^{2 \cdot 4 - 1}(2^{2 \cdot 4} - 1) = 2^7(2^8 - 1) = 32640$

По условию,  $300 < T_n < 28920$ .

Следовательно,  $T_n = 2016$ .

### **Задача 3. Нанопереходник графен-нанотрубка**



Объединение двух структурно родственных углеродных наноматериалов – графенового листа и углеродной нанотрубки – в единое целое открывает путь к новым перспективным материалам с уникальными свойствами, которые могут найти широкое применение как для

хранения энергии (аккумуляторы, суперконденсаторы), так и в наноэлектронике. Рассмотрим, как может быть устроено место соединения.

1. Воспользовавшись листом с сеткой шестиугольников\* как моделью листа графена, определите, можно ли присоединить к нему нанотрубку: (2 балла)

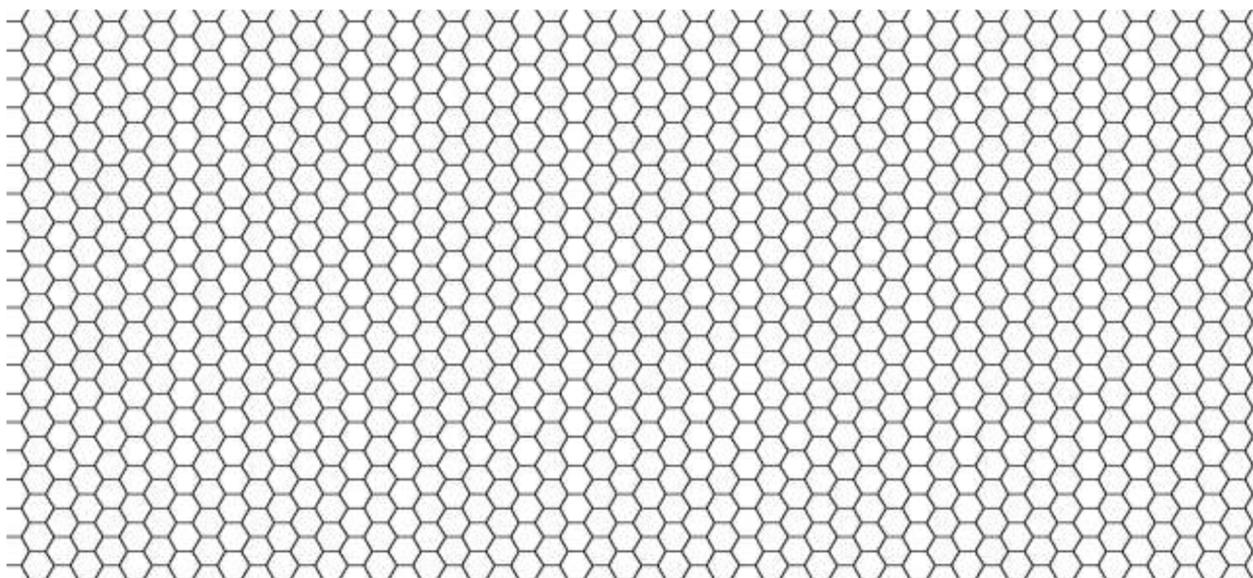
а) не используя никакие «дефекты» (то есть, не-шестиугольные циклы);

б) используя только пятиугольные «дефекты» (получаются удалением из графенового листа сектора  $60^\circ$ );

в) используя только семиугольные «дефекты» (получается добавлением сектора  $60^\circ$ ).

2. Используя геометрические построения на сетке шестиугольников, выведите точное число «дефектов», содержащихся в нанопереходнике «нанотрубка-графен». (4 балла)

\*Для удобства прилагающуюся ниже сетку шестиугольников можете распечатать на листе бумаги и вырезать, изгибать, добавлять, склеивать ее фрагменты. Помните, что в переходнике при этом в каждом узле сетки должны сходиться ровно 3 ребра.



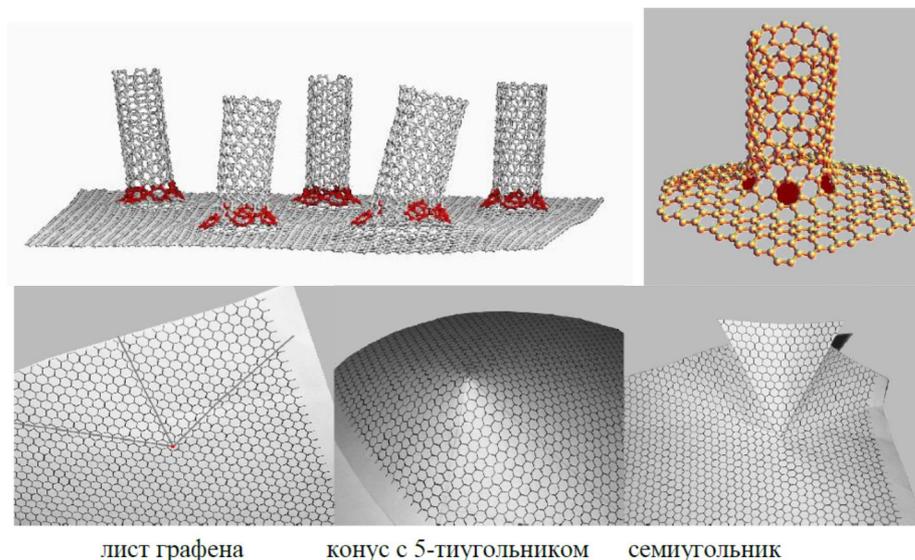
**Решение:**

1. Воспользовавшись листом с сеткой шестиугольников как моделью листа графена, определите, можно ли присоединить к нему нанотрубку: (2 балла)

а) не используя никакие «дефекты» (то есть, не-шестиугольные циклы);

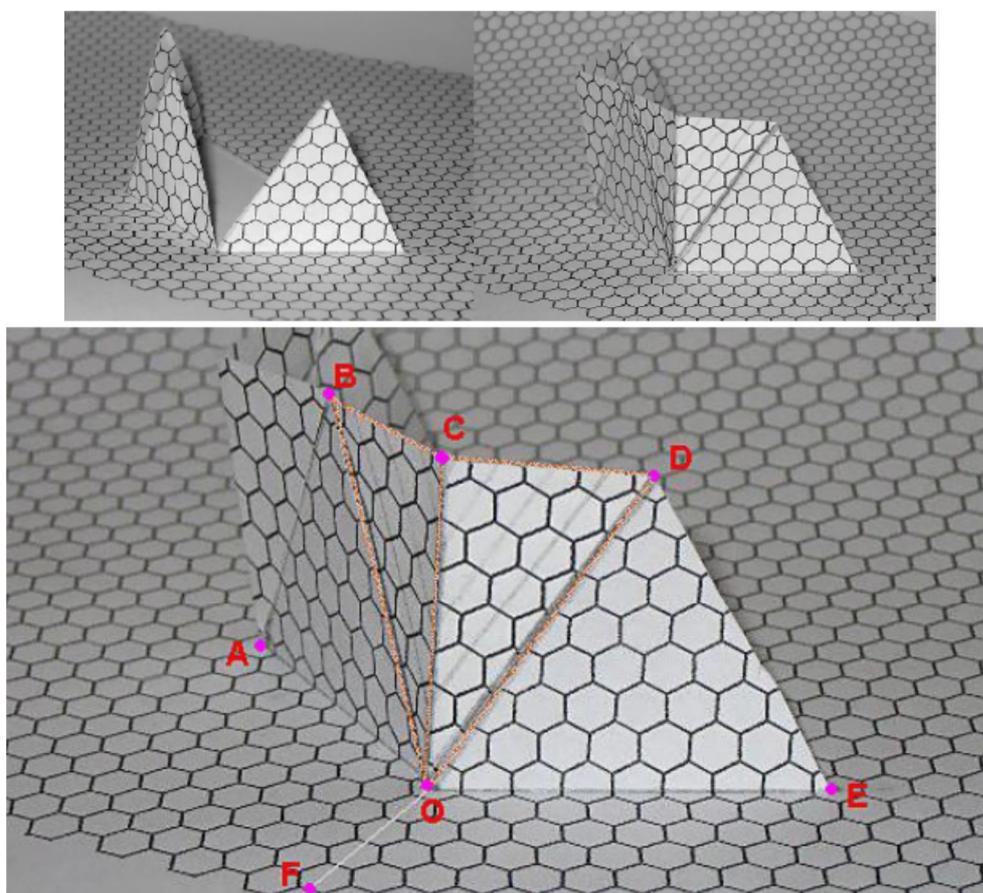
б) используя только пятиугольные «дефекты» (получаются удалением из графенового листа сектора  $60^\circ$ );

в) используя только семиугольные «дефекты» (получается добавлением сектора  $60^\circ$ ).



Не используя дефекты, можно лишь свернуть лист графена в трубку. Добавляя пятиугольники в лист графена (вырезая сектора  $60^\circ$ ) мы получим последовательность конусов, которая при добавлении 6-го пятиугольника приведет к половине закрытой углеродной нанотрубки (см. задачу IX Олимпиады «Углеродные наноконусы»). Следовательно, чтобы «загнуть вверх» графеновый лист, нам нужно не вырезать, а добавлять сектора к шестиугольной сетке – т.е. добавлять семиугольники.

2. Используя геометрические построения на сетке шестиугольников, выведите точное число «дефектов», содержащихся в нанопереходнике «нанотрубка-графен». (4 балла)

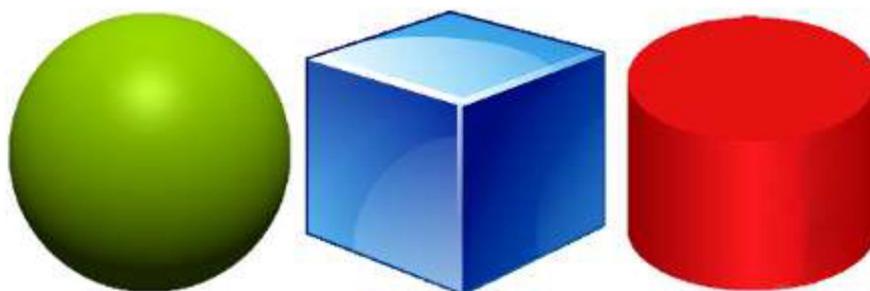


Сначала построим единичный семиугольный «дефект». Для этого в разрез листа графена вставим сектор  $60^\circ$  (отмечен оранжевым пунктиром) с образованием семиугольника с центром в точке  $O$ . Если разделить «добавленный» сектор на две половинки (по  $30^\circ$ ) по биссектрисе  $OC$ , то эти половинки вместе с соседними  $60$ -ти градусными секторами ( $BOA$  и  $DOE$  соответственно) составят  $90$ -то градусные сектора  $COA$  и  $COE$ . Их мы можем «отогнуть» перпендикулярно плоскости графенового листа (см. рис). При этом угол  $AOE$  будет равен сумме углов  $AOB$  и  $DOE$ , т.е.  $60 \cdot 2 = 120^\circ$ , поскольку до образования  $7$ -миугольника сектора  $BOA$  и  $DOE$  составляли единый плоский лист.

На продолжении отрезка  $OA$  в центре шестиугольника мы можем так же построить еще один семиугольник, и продолжать это до тех пор, пока не будет построен последний семиугольник на продолжении отрезка  $OE$ . При этом центры семиугольников образуют многоугольник, все углы которого равны  $120^\circ$  (т.е.  $180 \cdot 2 / (180 - 120) = 6$ -тиугольник), а перпендикулярная исходному графеновому листу поверхность замыкается в трубку.

Таким образом, мы наглядно вывели, что переходник графен-нанорубка содержит  $6$  семиугольников.

#### Задача 4. Новый катализатор



На Секретном Заводе трем лабораториям было поручено получить наночастицы Нового Каталитического Материала с максимальной величиной удельной площади поверхности  $S_{sp}$  (то есть, площади поверхности, приходящейся на единицу массы образца,  $m^2/g$ ). Первой лаборатории удалось синтезировать наночастицы Катализатора в форме шара, второй – куба, а третьей – цилиндра (с соотношением диаметра к высоте  $1:1$ ). Все полученные наночастицы имели одинаковую массу и плотность.

Какая из лабораторий лучше всех, а какая – хуже всех справилась с заданием? Ответ подтвердите расчетом.

**Решение:**

1) По определению, удельная площадь поверхности одной наночастицы составляет

$$S_{sp} = \frac{S}{m} = \frac{S}{V\rho},$$

где  $S, V$  – площадь поверхности и объем одной наночастицы, соответственно.

2) Поскольку все полученные типы наночастиц имеют одинаковую массу  $m$  и плотность  $\rho$ , следовательно, они имеют одинаковый объем  $V$ . То есть, соотношение удельных площадей

поверхности  $S_{sp}$  наночастиц разных типов будет соответствовать соотношению их площадей поверхности  $S$ .

а) шар:  $V = 4/3\pi a^3$ , тогда радиус шара

$$a = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}};$$

б) куб:  $V = b^3$ , тогда ребро куба

$$b = \sqrt[3]{V};$$

в) цилиндр:  $h = 2c$ ,  $V = \pi c^2 \cdot h = \pi c^3$ , тогда радиус цилиндра

$$c = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

4) Запишем площади поверхности для наночастиц каждого из типов:

а) шар:  $S_1 = 4\pi a^2 = 4\pi \left(\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}\right)^2 = 4\pi^3 \sqrt[3]{\frac{9}{16\pi^2}} \cdot \sqrt[3]{V^2} \approx 4,8\sqrt[3]{V^2}$ ;

б) куб:  $S = 6b^2 = 6\sqrt[3]{V^2}$ ;

в) цилиндр:  $S = 2\pi c^2 + 2\pi c \cdot h = 2\pi c^2 + 2\pi c \cdot 2c = 6c^2 = 6\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2 = 6\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi^2}} \cdot \sqrt[3]{V^2} \approx 5,5\sqrt[3]{V^2}$ .

5) Запишем соотношение полученных площадей поверхности:

$$S_1 : S_2 : S_3 = 4,8 : 6 : 5,5 \text{ или } S_1 < S_2 < S_3$$

Лучше всех справилась с заданием вторая лаборатория.

Хуже всех справилась с заданием первая лаборатория.

Также возможен расчет через соотношение  $S/V$

1) Выведем соотношение  $S/V$  для каждого типа наночастиц:

а) шар:  $\frac{S_1}{V} = \frac{4\pi a^2}{4/3\pi a^3} = \frac{3}{a}$ ; б) куб:  $\frac{S_2}{V} = \frac{6b^2}{b^3} = \frac{6}{b}$ ; в) цилиндр:  $\frac{S_3}{V} = \frac{2\pi c^2 + 2\pi c \cdot 2c}{\pi c^2 \cdot 2c} = \frac{3}{c}$ .

2) Запишем для них удельную площадь поверхности:

а) шар:  $S_{sp1} = \frac{3}{a\rho} = \frac{3}{\rho} \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3V}}$ ; б) куб:  $S_{sp2} = \frac{6}{b\rho} = \frac{6}{\rho} \sqrt[3]{\frac{6}{V}}$ ; в) цилиндр:  $S_{sp3} = \frac{3}{c\rho} = \frac{3}{\rho} \sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}$ .

3) Запишем соотношение полученных удельных площадей:

$$S_{sp1} : S_{sp2} : S_{sp3} = \frac{3}{\rho} \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3V}} : \frac{6}{\rho} \sqrt[3]{\frac{6}{V}} : \frac{3}{\rho} \sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}} = \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} : 2 : \sqrt[3]{2\pi} \approx 1,61 : 2 : 1,84 \text{ или } S_{sp1} < S_{sp3} < S_{sp2}$$

Лучше всех справилась с заданием вторая лаборатория.

Хуже всех справилась с заданием первая лаборатория.

### Задача 5. Формулы интеркалятов

(5 баллов)

Взаимодействие щелочных металлов с графитом приводит к образованию соединений внедрения – интеркалятов, в которых слои внедренных атомов чередуются со слоями

графита. Расположение атомов металлов относительно листа графита упорядоченно (см. рис.), слой интеркалята можно разбить на некоторые одинаковые двумерные ячейки.

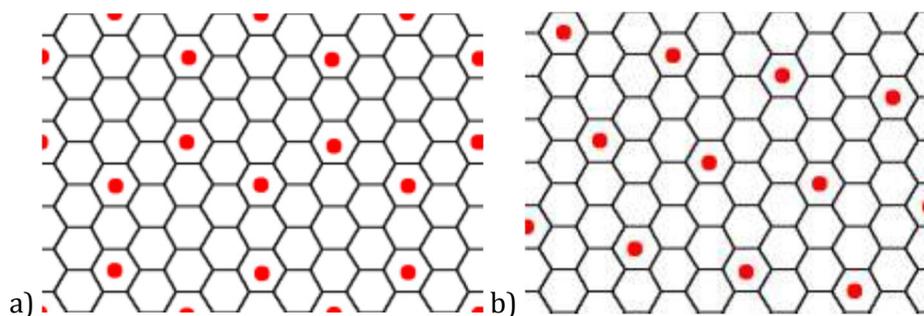
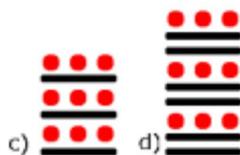


Рис. Взаимное расположение атомов К относительно листа графита в а)  $KC_x$  и б)  $KC_y$ , где  $x$  и  $y$  – целые числа.

1. По рисункам а) и б) рассчитайте  $x$  и  $y$ . (2 балла)

При интеркаляции атомы металла могут располагаться как над каждым слоем графита (рис. с), так и с периодическим пропуском одного (рис. d) или нескольких из них.



2. Рассчитайте формулы интеркалятов  $KC_n$  и  $KC_m$  (3 балла), если известно, что:

- структура «заполненных» слоев в них отвечает  $KC_x$  и  $KC_y$ , соответственно,
- $n$  кратно 9, а  $m$  кратно 4,
- доля атомов калия в каждом из них составляет не менее 2.5%.

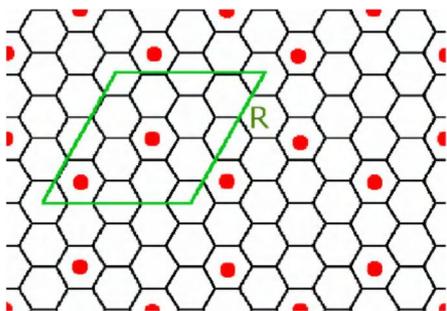
**Решение:**

1. По рисункам а) и б) рассчитайте  $x$  и  $y$ . (2 балла)

Возможно несколько вариантов разбиения слоя интеркалята на одинаковые ячейки, которые отличаются друг от друга расположением относительно атомов калия. Но соотношение атомов углерода и калия, приходящееся на ячейку для всех вариантов ее выбора одинаково.

В решении приводится лишь один из возможных вариантов.

*Рисунок а).*



1) Выделим на рисунке а) ячейку. Она представляет собой ромб со стороной R (зеленая линия).

2) На такой ромб приходится 2 атома калия (лежат внутри двумерной ячейки) и 24 атома углерода ( $16 \cdot 1/2 = 8$  атомов углерода на ребрах ромба плюс 16 атомов – внутри самой ячейки). Если, например, границы выбранной ячейки сместить немного вверх и влево, то все 24 атома углерода окажутся внутри двумерной ячейки.

3) В выбранной ячейке число атомов калия соотносится с числом атомов углерода как 2 к 24. Таким образом, расположение атомов калия на рисунке а) отвечает формуле  $KC_{12}$ .

4) Второй способ нахождения числа атомов углерода, приходящегося на выбранную ячейку.

По рисунку рассчитаем длину  $R = 2 \cdot a + 2 \cdot 2a = 6a$  (две стороны углеродного шестиугольника + две больших диагонали углеродного шестиугольника), где  $a$  – сторона шестиугольника.

Тогда площадь ромба составляет  $S = R^2 \sin(60) = 36a^2 \sin(60)$ .

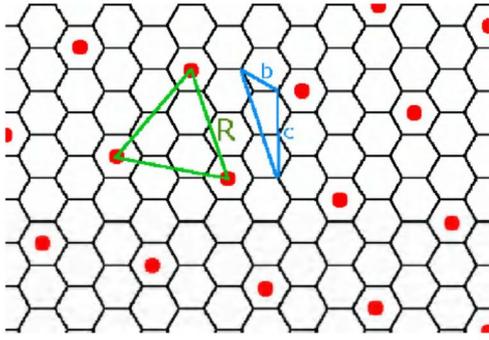
В то же время, на углеродный шестиугольник площадью  $S_6 = 3a^2 \sin(60)$  приходится  $6 \cdot 1/3 = 2$  атома углерода. Тогда один атом углерода приходится на площадь  $S_c = S_6/2 = 3a^2 \sin(60)/2 = 1,5a^2 \sin(60)$ , а всего на площадь ромба приходится

$$\frac{36a^2 \sin(60)}{1,5a^2 \sin(60)} = 24$$

атома углерода.

То есть, в выбранной ячейке число атомов калия соотносится с числом атомов углерода как 2 к 24. Таким образом, расположение атомов калия на рисунке а) отвечает формуле  $KC_{12}$ .

*Рисунок б).*



1) Выделим на рисунке b) ячейку. Она представляет собой равносторонний треугольник со стороной R (зеленая линия).

2) На такой треугольник приходится  $3 \cdot 1/6 = 0,5$  атома калия (по одному в вершине, но каждая вершина принадлежит 6-ти одинаковым треугольным ячейкам) и 7 атомов углерода (все лежат в пределах двумерной ячейки).

3) В выбранной ячейке число атомов калия соотносится с числом атомов углерода как 0,5 к 7. Таким образом, расположение атомов калия отвечает формуле  $KC_{14}$ .

4) Второй способ нахождения числа атомов углерода, приходящегося на ячейку. По рисунку рассчитаем длину стороны треугольника R учитывая, что  $b = 0,5c = 2a \cos(30) = a\sqrt{3}$ , где a – сторона шестиугольника:

$$b = 0,5c = 2a \cos(30) = a\sqrt{3}, \text{ где } a \text{ – сторона шестиугольника:}$$

$$R^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos(120) = 3a^2 + 12a^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot (-0,5) = 21a^2$$

Тогда площадь треугольника составляет

$$S = 0,5R^2 \sin(60) = 10,5a^2 \sin(60).$$

На площадь всего треугольника приходится

$$\frac{10,5a^2 \sin(60)}{1,5a^2 \sin(60)} = 7$$

атомов углерода.

То есть, в выбранной ячейке число атомов калия соотносится с числом атомов углерода как 0,5 к 7. Таким образом, расположение атомов калия отвечает формуле  $KC_{14}$ .

2. Рассчитайте формулы интеркалятов  $KC_n$  и  $KC_m$  (3 балла), если известно, что:

- структура «заполненных» слоев в них отвечает  $KC_x$  и  $KC_y$ , соответственно,
- n кратно 9, а m кратно 4,
- доля атомов калия в каждом из них составляет не менее 2.5%.

Запишем выражение для нахождения доли атомов калия в  $KC_n$  при произвольном значении

$$n: \omega = (1 + n)^{-1} \text{ и } \omega \geq 0,025.$$

Следовательно,  $n \geq 1/\omega - 1$  и  $n \leq 39$

$KC_n$

Искомое значение  $n$  ограничено следующими условиями:

$$n:12, n:9 \text{ и } n \leq 39.$$

Найдем НОК(9,12) = 36,  $36 < 39$ . То есть, формула первого интеракалюта –  $KC_{36}$ .

$KC_m$

Искомое значение  $m$  ограничено следующими условиями:

$$m:14, m:4 \text{ и } m \leq 39.$$

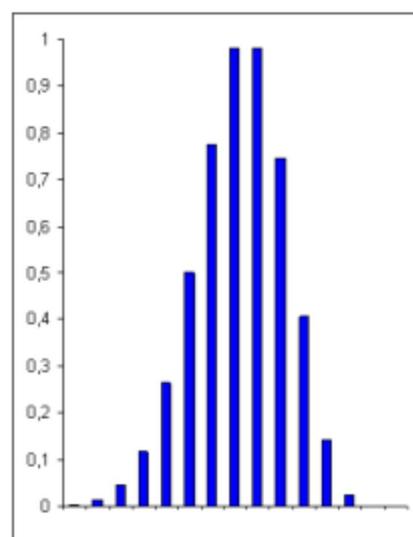
Найдем НОК(4,14) = 28,  $28 < 39$ . То есть, формула второго интеракалюта –  $KC_{28}$ .

### Задача 6. Сбитая шкала

Юный химик Полуэкт в ходе эксперимента получил некоторый кластер бора  $B_x$ , для которого затем записал масс-спектр\*. Вскоре обнаружилось, что шкала масс-спектрометра безнадежно сбилась и точно определить массы, отвечающие пикам полученного кластера, невозможно. Поначалу Полуэкт хотел переделать эксперимент, однако, внимательно изучив полученный масс спектр (приведён на рисунке), решил вычислить число атомов в кластере  $B_x$ .

Сделайте это и вы, если известно, что бор представляет собой смесь из двух изотопов: 20%  $^{10}B$  и 80%  $^{11}B$ .

Изотопные пики с малой относительной интенсивностью, находящиеся в левой части спектра, не показаны.



\*Масс-спектроскопия - метод исследования, основанный на определении отношения массы к заряду ионов, образующихся при ионизации вещества. Относительная интенсивность пика  $I$  пропорциональна числу кластеров данной массы в анализируемом образце. Координаты каждого пика по оси абсцисс соответствуют сумме масс всех атомов в кластере.

### Решение:

1) Поскольку шкала масс-спектра идет с возрастанием слева на право, то самый правый пик на спектре отвечает массе  $11x$  – то есть, кластеру состоящему только из атомов «тяжелого» бора –  $^{11}B$ . На единицу меньше будет весить кластер, в котором один из атомов бора  $^{11}B$  замещен на более легкий изотоп  $^{10}B$ :  $m = 11(x - 1) + 10 \cdot 1 = 11x - 11 + 10 = 11x - 1$ . Самым легким будет кластер, составленный только из атомов  $^{10}B$ :  $m = 11(x - x) + 10x = 10x$ .

2) Интенсивности изотопных пиков, отвечающих массам  $10x, 10x+1, \dots, 11x-1, 11x$  (всего  $x + 1$  пик), в масс-спектре кластера  $B_x$  будут пропорциональны вероятностям встретить в результатах синтеза кластеры соответствующей массы и изотопного состава. В свою

очередь, *соотношение* интенсивностей любых двух пиков будет равно соотношению вероятностей встретить отвечающие им кластеры.

3) Вероятность того, что произвольный атом бора окажется изотопом  $^{10}\text{B}$ , составляет 20% (и 80% того, что он окажется  $^{11}\text{B}$ ). Это же утверждение справедливо и для любого из  $x$  атомов бора в полученном кластере. Таким образом, вероятность того, что кластер состоит только из атомов «тяжелого» изотопа бора, составляет  $P(11x) = (0,8)^x$ .

Вероятность того, что кластер  $V_x$  содержит  $y$  атомов бора  $^{10}\text{B}$ , составляет

$$P(11(x-y) + 10y) = P(11x - y) = (0,8)^{x-y} (0,2)^y C_x^y = (0,8)^{x-y} (0,2)^y \frac{(x)!}{y!(x-y)!},$$

Где  $C_x^y$  - комбинаторное сочетание из  $x$  элементов по  $y$  элементов, то есть, количество вариантов расположения  $y$  атомов  $^{10}\text{B}$  в кластере из  $x$  атомов.

4) Из представленного в условии масс-спектра можно видеть, что 5-й и 6-й от правого конца пики, отвечающие  $y = 4$  ( $m = 11x - 4$ ) и  $y = 5$  ( $m = 11x - 5$ ), соответственно, имеют равную интенсивность. Следовательно, кластеры, содержащие 4 и 5 атомов  $^{10}\text{B}$ , равновероятны:

$$\begin{aligned} P(11x - 5) &= P(11x - 4) \\ (0,8)^{x-5} (0,2)^5 \frac{(x)!}{5!(x-5)!} &= (0,8)^{x-4} (0,2)^4 \frac{(x)!}{4!(x-4)!} \\ \frac{0,2}{5!(x-5)!} &= \frac{0,8}{4!(x-4)!} \\ (x-4) \cdot 0,2 &= 0,8 \cdot 5 \\ x &= \frac{4}{0,2} + 4 = 24 \end{aligned}$$

Таким образом, масс-спектр отвечает кластеру  $V_{24}$ .

### Задача 7. «Полусфера» – младший родственник купола Фуллера



Многие из вас видели такой примечательный элемент детской площадки как состоящая из *треугольных* граней «полусфера» (она же «паутинка», рис. 1а). Как ни удивительно, она является младшим родственником широко известного купола Фуллера (рис. 1б), а значит – и фуллеренов!

1. Путем подсчета по рисунку найдите, сколько вершин содержит «полусфера». (1 балл)  
Если взять две нанокопии «полусферы» и в центре каждой из треугольных граней

расположить атом углерода, то из полученных углеродных полусфер можно собрать молекулы фуллеренов (многогранников, состоящих целиком из пяти- и шестиугольников).

2. Сколько атомов содержат полученные фуллерены? (2 балла)

3. Будут ли среди них изомеры\*? Если да, то поясните, в чем заключаются их отличия. (3 балла)

4. Можно ли в «полусферу» вписать половинку икосаэдра и/или додекаэдра? Поясните, где в структуре «полусферы» при этом будут располагаться вершины вписанного многогранника и где эти вершины окажутся в молекулах полученных из «полусферы» фуллеренов. (3 балла)

\* Изомеры – молекулы имеющие одинаковую формулу, но разную структуру (такие молекулы невозможно совместить друг с другом ни при каких поворотах в пространстве).

#### **Решение:**

1. Путем подсчета по рисунку найдите, сколько вершин содержит «полусфера». (1 балл)

Рассмотрим «полусферу» по уровням. Всего вершин: 10 (нижнее кольцо) + 10 (второй уровень) + 5 (верхнее кольцо) + 1 (макушка фигуры) = 26

2. Сколько атомов содержат полученные фуллерены? (2 балла)

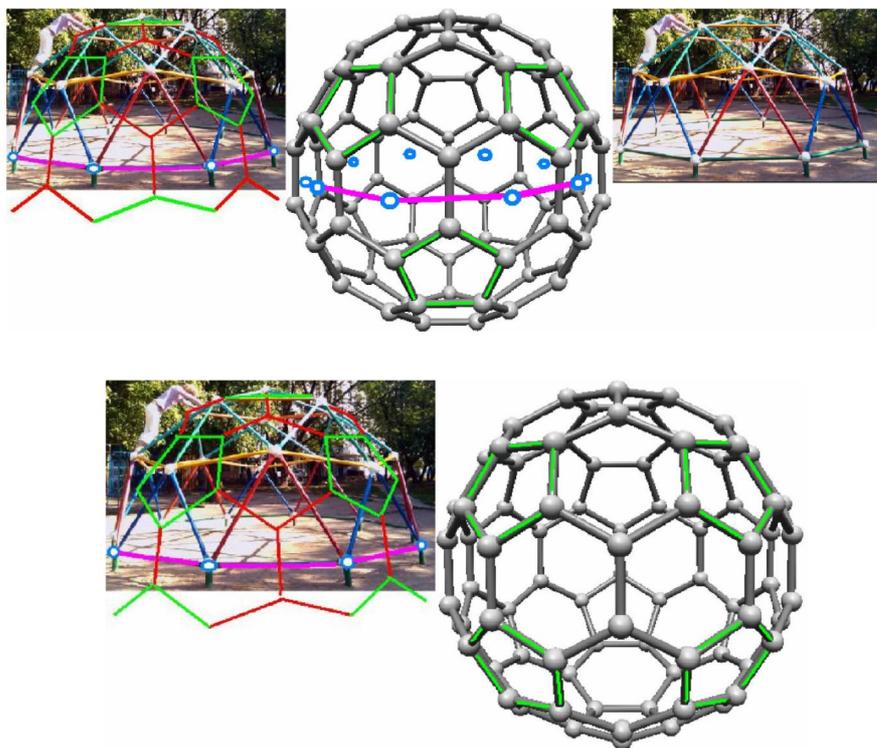
Поскольку, из каждой треугольной грани наноконии «полусферы» получается 1 атом углерода фуллерена, то найдем общее число треугольных граней «полусферы». Первый и второй снизу уровни содержат по 10 вершин и образуют антипризму. Поскольку каждая вершина антипризмы принадлежит 3 треугольникам и каждый треугольник имеет три вершины, то антипризма суммарно содержит  $20 \cdot 3 / 3 = 20$  треугольников.

Второй и третий снизу уровни содержат 10+5 вершин, что, по аналогии, составляет  $15 \cdot 3 / 3 = 15$  треугольников. Наконец, в самой верхней части «полусферы» находится 5 треугольников. Таким образом, общее число треугольников в «полусфере» составляет  $20 + 15 + 5 = 40$ .

Столько же атомов будет и в каждой из половинок фуллеренов, значит, фуллерены –  $C_{80}$ .

3. Будут ли среди них изомеры? Если да, то поясните, в чем заключаются их отличия. (3 балла)

Складывать половинки фуллеренов (и пару «полусфер») можно двумя способами: чтобы под пятиугольником оказался шестиугольник (низ повернут относительно верха на  $36^\circ$ , что приводит к фуллерену  $C_{80}$  с икосаэдрической симметрией), или чтобы под пятиугольником оказался пятиугольник (верх и низ зеркальны). То есть, получаются два изомера фуллерена:



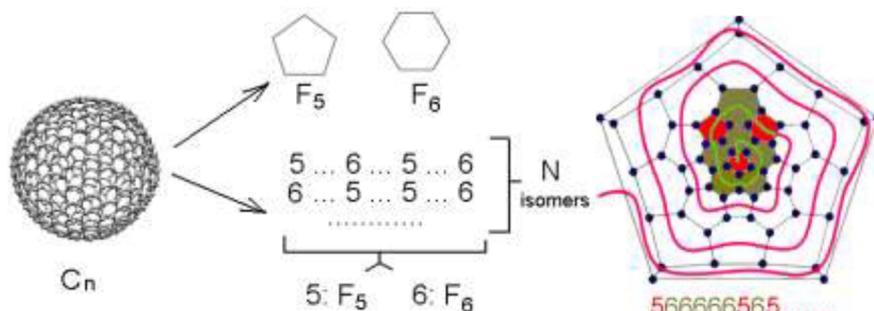
4. Можно ли в «полусферу» вписать половинку икосаэдра и/или додекаэдра? Поясните, где в структуре «полусферы» при этом будут располагаться вершины вписанного многогранника и где эти вершины окажутся в молекулах полученных из «полусферы» фуллеренов. (3 балла)

Да, можно.

Вершины вписанного икосаэдра будут находится в тех вершинах «полусферы», где сходятся по 5 ребер (эти вершины переходят в центры 12ти пятиугольников фуллерена  $C_{80}$ ). Вершины вписанного додекаэдра будут находится в центрах таких треугольных граней «полусферы», в каждой из вершин которых сходятся по 6 ребер (эти грани переходят в вершины, принадлежащие только шестиугольникам фуллерена  $C_{80}$ ).

При этом отметим, что полностью вписать целый икосаэдр и додекаэдр (а не их половинки) получится только в многогранник, отвечающий икосаэдрической молекуле  $C_{80}$ .

### Задача 8. Число изомеров фуллерена $C_{2016}$



Молекулы фуллеренов – одной из аллотропных форм углерода – представляют собой выпуклые многогранники, составленные из пяти- и шестиугольников.

1. Сколько пятиугольников (**F5**) и шестиугольников (**F6**) содержит произвольный фуллерен  $C_n$ ? Найдите **F5** и **F6** для фуллерена  $C_{2016}$ . (2 балла)

Изомерными называются молекулы фуллеренов, имеющие одинаковые формулы (многогранники с одинаковым числом вершин  $n$ ), но разное расположение пяти- и шестиугольников друг относительно друга. С ростом числа  $n$  в  $C_n$  число изомеров  $N$  растет лавинообразно.

Поверхность подавляющего большинства фуллеренов можно развернуть по спирали в цепочку из пяти- и шестиугольников, которую можно записать в виде последовательности **P**, состоящей из **F5** пятерок и **F6** шестерок (см. рис).

2. Грубую оценку «сверху» числа изомеров  $N$  фуллерена  $C_n$  легко получить, рассчитав количество **всех** последовательностей **P**, состоящих из **F5** пятерок и **F6** шестерок. Выведите зависимость  $N(n)$ , описывающую такую оценку количества изомеров. (2.5 балла)

3. В каких координатах (и при каком условии) графиком полученной зависимости  $N(n)$  будет прямая? (3 балла) Чему будет равен ее тангенс наклона? (0.5 балла)

4. Оцените число изомеров  $C_{2016}$  в таком приближении. (1.5 балла)

Полученная вами зависимость  $N(n)$  дает представление о характере роста числа изомеров, но, в то же время, очень сильно завышает результат (сравните с данными таблицы), так как, во-первых, не все последовательности **P** можно «свернуть» в реальный фуллерен, а, во-вторых, одному фуллерену будут соответствовать много разных последовательностей **P**.

Таблица. Оценка числа изомеров  $N$  для фуллеренов  $C_n$ , полученная при помощи компьютера.

n	1000	1200	1400	1600	1800
N	$5.7 \cdot 10^{14}$	$3.0 \cdot 10^{15}$	$1.2 \cdot 10^{16}$	$4.1 \cdot 10^{16}$	$1.2 \cdot 10^{17}$

5. На основе данных, представленных в таблице, рассчитайте число изомеров  $C_{2016}$ . (4.5 балла)

**Решение:**

1. Сколько пятиугольников ( $F_5$ ) и шестиугольников ( $F_6$ ) содержит произвольный фуллерен  $C_n$ ? Найдите  $F_5$  и  $F_6$  для фуллерена  $C_{2016}$ . (2 балла)

Запишем формулу Эйлера для произвольного фуллерена:  $V - E + F = 2$  (где  $V$  – число вершин,  $E$  – число ребер, а  $F$  – число граней фуллерена  $C_n$ ).

$$\frac{1}{3}(5F_5 + 6F_6) - \frac{1}{2}(5F_5 + 6F_6) + F_5 + F_6 = 2.$$

Преобразуя, получаем:  $F_5 = 12$  и, как следствие,  $F_6 = n/2 - 10$ .

Тогда для  $C_{2016}$ :  $F_5 = 12$ ,  $F_6 = 1008 - 10 = 998$ .

2. Грубую оценку «сверху» числа изомеров  $N$  фуллерена  $C_n$  легко получить, рассчитав количество всех последовательностей  $P$ , состоящих из  $F_5$  пятерок и  $F_6$  шестерок. Выведите зависимость  $N(n)$ , описывающую такую оценку количества изомеров. (2.5 балла)

Для фуллерена  $C_n$  длина последовательности  $P$  будет равна суммарному числу пяти- и шестиугольников  $F_5 + F_6 = 12 + 0.5n - 10 = 0.5n + 2$

Общее число вариантов последовательности  $P$  равно числу возможных способов выбрать 12 из  $0.5n + 2$  позиций:

$$N = C_{0.5n+2}^{12} = \frac{(0.5n + 2)!}{12!(0.5n - 10)!}$$

3. В каких координатах (и при каком условии) графиком полученной зависимости  $N(n)$  будет прямая? (3 балла) Чему будет равен ее тангенс наклона? (0.5 балла)

При  $n \gg 20$  полученную формулу можно упростить до вида

$$N \approx \frac{n^{12}}{12!2^{12}}$$

Такая зависимость  $N(n)$  линеаризуется в логарифмических координатах:

$$\lg N = 12 \lg n - \lg(12!2^{12}) \quad (\text{абсцисса } \lg n, \text{ ордината } \lg N).$$

Тангенс угла наклона полученной прямой равен 12.

4. Оцените число изомеров  $C_{2016}$  в таком приближении. (1.5 балла)

$$N(2016) \approx \frac{2016^{12}}{12!2^{12}} = 2,297 \cdot 10^{27}$$

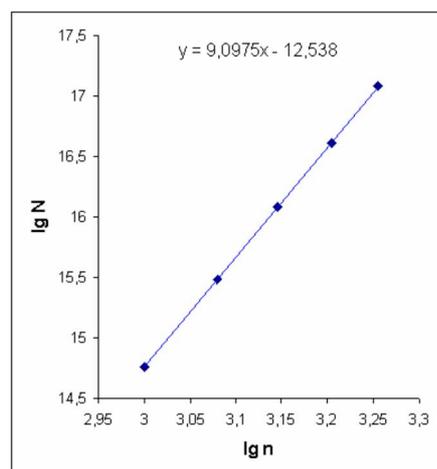
Таблица. Примерное число изомеров  $N$  для фуллеренов  $C_n$ , полученные при помощи компьютера.

$n$	1000	1200	1400	1600	1800
$N$	$5.7 \cdot 10^{14}$	$3.0 \cdot 10^{15}$	$1.2 \cdot 10^{16}$	$4.1 \cdot 10^{16}$	$1.2 \cdot 10^{17}$

5. На основе данных, представленных в таблице, рассчитайте число изомеров  $C_{2016}$ . (4.5 балла)

Зная, что зависимость  $N(n)$  имеет степенной характер роста, исходя из данных, приведенных в таблице, построим график в координатах  $\lg N - \lg n$ . Все рассчитанные по таблице точки хорошо ложатся на прямую, описываемую уравнением  $y = 9,1x - 12,54$ . Подставляя  $x = \lg(2016)$ , находим  $N(2016) = y = 3,4 \cdot 10^{17}$ . Интересно отметить, что величина свободного члена в полученном уравнении близка к  $\lg(12!2^{12}) \approx 12,3$ .

Из независимого расположения 12 пятиугольников в спирали следовало бы, что число изомеров растет



пропорционально  $n^{12}$ , в то время как из-за описанных в условии ограничений на самом деле число изомеров растет заметно медленнее – пропорционально примерно  $n^9$ .

### Задача 9. БиоИнформатика и *E. Coli*

Без компьютеров и электронных методов хранения и обработки информации современная наука, включая нанотехнологии, немислима. Все больше открытий совершается путем компьютерной обработки уже имеющихся данных, например, геномов, поскольку в наши дни уже расшифрованы и доступны для всех желающих геномы множества организмов.

Бактерия *E. Coli* (кишечная палочка) является одним из удобных модельных организмов в биологии, а геном ее лабораторного штамма K-12 был в числе самых первых расшифрованных. Для выполнения этого задания сохраните по [ссылке](#)<sup>1</sup> (<5 МВ) с сайта Национального центра биотехнологической информации США (NCBI) к себе на компьютер файл генома *E. Coli*.

#### Часть 1. ДНК и данные

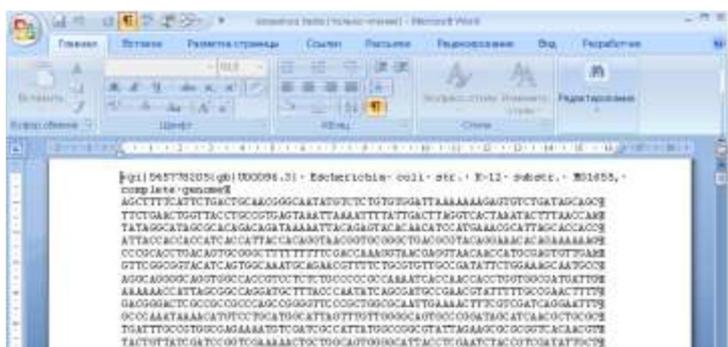


Рис. 1.

1. Посмотрите свойства сохраненного вами файла: сколько байт составляет его размер? (1 балл) Рассчитайте точное число пар оснований<sup>2,3</sup> в геноме *E. Coli*. (2 балла)

Длина генома измеряется, как правило, в мегабазах (Mbp, от «mega base pairs») – т.е. в миллионах пар оснований.

2. Оцените, сколько примерно мегабайт (МВ) будет занимать файл генома, имеющий длину в одну мегабазу (1Mbp), при таком же способе электронной записи файла. (1 балл)

Поместится ли на обычный DVD диск файл с геном человека, имеющим длину 3 234.83 Мб? (1 балл)

3. На любом языке программирования напишите программу (к решению приложите ее код), которая прочитает скачанный вами файл и сосчитает суммарное число нуклеотидов в геноме *E. Coli* и процентное содержание каждого из них по отдельности, чему они равны? (4 балла)

<sup>1</sup> Рекомендуется сразу сохранить файл (или переименовать скачанный sequence.fasta) в coli.txt Также вы можете скачать этот файл в архиве с сайта Nanometer по ссылке со страницы задачи (~1.4 МВ).

<sup>2</sup> Наследственная информация в молекуле ДНК хранится в виде текста записанного всего четырьмя буквами – А, G, T, C. Каждой букве из одной ДНК цепочки соответствует строго определенная (комплементарная: А напротив Т, С напротив G, а также наоборот) буква второй цепочки. Поэтому

для описания генома достаточно записать буквами только одну из них, что и сделано в скачиваемом вами файле, поэтому число пар оснований равно числу символов нуклеотидов в этом файле.

<sup>3</sup> Учтите, что каждый символ в файле кодируется 8 битами информации, а через каждые 70 букв нуклеотидов стоит символ переноса строки; первая строка, содержащая описание файла, вместе с пустой последней строкой содержат суммарно 87 символов, включая символы переноса строк.

## Часть 2. Поиск настоящих ДНК-палиндромов

ДНК-палиндромом называется такая последовательность ДНК, прочтение которой совпадает с прочтением в обратном направлении по комплементарной цепочке. Например, последовательность **АТТА** – «обычный» палиндром, а последовательность **ААТТ** – ДНК-палиндром. Важным биологическим свойством ДНК-палиндрома является то, что если его цепочку сложить пополам, она будет сама себе комплементарна (см. рис. 2а).

Палиндромы могут задавать особенности наноструктуры молекулы ДНК, которые отвечают за выполнение тех или иных важных функций во внутриклеточных процессах и могут принимать весьма сложные формы. Поэтому поиск таких ДНК-палиндромов может требовать применения достаточно сложных алгоритмов.

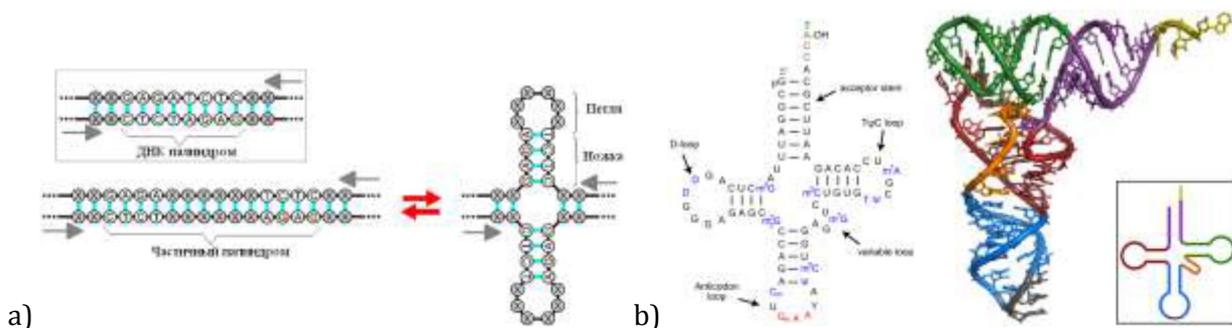


Рис. 2. Примеры нуклеотидных палиндромов:

б) транспортная РНК дрожжей (нуклеотидная последовательность и трехмерная модель);

**4.** На любом языке программирования напишите программу для поиска ДНК-палиндромов в файле генома *E. Coli* K-12 и найдите все палиндромы с длиной ножки от 17 до 25 пар оснований (максимальную длину петли при поиске ограничьте 8 нуклеотидами). Приложите к решению текст программы и найденные палиндромы (достаточно привести номер первого нуклеотида палиндрома, число пар нуклеотидов в ножке и число нуклеотидов в петле). **(7 баллов)**

- рекомендуется читать файл последовательно, используя строки (а не массивы) для хранения прочитанных символов. Для быстрого поиска палиндромов удобно использовать функции поиска подстроки в строке (например, функцию `pos` в Turbo Pascal); для упрощения алгоритма можно не искать палиндромы в начале и конце файла.

- Если вы не можете выполнить задание полностью, найдите палиндромы с ножкой от 14 до 25 пар нуклеотидов с размером петли 0 нуклеотидов.

### Решение:

**1.** Посмотрите свойства сохраненного вами файла: сколько байт составляет его размер? (1 балл) Рассчитайте точное число пар оснований в геноме *E. Coli*. (2 балла)

Узнать свойства скачанного файла можно в проводнике Windows, кликнув по нему правой клавишей мышки и выбрав «свойства». В строке «размер» мы увидим:

Размер: 4,48 МБ (4 708 049 байт)

т.е. файл занимает 4 708 049 байт.

Поскольку 1 байт = 8 бит, а каждый символ кодируется 8 битами, то количество байт равно количеству символов в файле.

По условию, на строки, несодержащие нуклеотиды, приходится 87 символов, значит, на строки с нуклеотидами приходится  $4708049 - 87 = 4707962$  символов. Поскольку на 70 букв нуклеотидов приходится один символ конца строки, то каждая строка содержит суммарно 71 символ.  $4707962 / 71 \approx 66309,32$ , значит, буквы нуклеотидов располагаются на 66310 строках. Столько же в этих строках символов переноса строки, следовательно, количество символов нуклеотидов (и число пар оснований в геноме) будет  $4707962 - 66310 = 4\,641\,652$ .

2. Оцените, сколько примерно мегабайт (МБ) будет занимать файл генома, имеющий длину в одну мегабазу (1Mbp), при таком же способе электронной записи файла. (1 балл)  
Поместится ли на обычный DVD диск файл с геном человека, имеющим длину 3 234.83 Мб? (1 балл)

Вклад первой служебной строки (заголовка) будет пренебрежимо мал по сравнению с миллионом символов, поэтому можно оценить, какой объем приходится на 1Mb исходя из имеющегося файла генома *E. Coli*. Поскольку  $1\text{MB} = 1024 \cdot 1024 = 1\,048\,576$  байт, а 1Mbp это  $1000 \cdot 1000 = 1\,000\,000$  пар нуклеотидов, то на 1Mbp будет приходиться  $4708049 / (1048576) / (4641652 / 1000000) \approx 0,967$  мегабайт (МБ) информации. Для записи файла с геномом человека потребуется  $3\,234,83 \cdot 0,967 \approx 3\,128,08$  МБ. Поскольку обычный DVD диск помещается около 4 700 МБ информации, значит, геном человека поместится с запасом.

3. На любом языке программирования напишите программу (к решению приложите ее код), которая прочитает скачанный вами файл и сосчитает суммарное число нуклеотидов в геноме *E. Coli* и процентное содержание каждого из них по отдельности, чему они равны? (4 балла)

Результат работы программы (число символов нуклеотидов совпадает с расчетом, проведенным исходя из размера файла):

```
n=4641652
A=1142742, 24.6192950268568%
C=1141382, 24.5899951138086%
G=1180091, 25.423943888943%
T=1177437, 25.3667659703916%
```

Пример программы на языке Pascal (PascalABC.NET <http://pascalabc.net/>)

```
{Подсчет числа нуклеотидов в файле coli.txt и вычисление их процентного содержания, PascalABC.NET}
```

```
Var
```

```
f: Text;
```

```

s: String;
ch: Char;
n, nA, nC, nG, nT: Longint;
wA, wC, wG, wT: Real;
BEGIN
n:=0; nA:=0; nC:=0; nG:=0; nT:=0;
Assign(f, 'coli.txt');
Reset(f);
Readln(f,s); {пропускаем первую служебную строку}
While (not Eof(f)) do
begin
Read(f,ch); {читаем символ из файла}
if (ch='A') or (ch='C') or (ch='G') or (ch='T') then
begin
n:=n+1;
case ch of
'A' : nA:=nA+1;
'T' : nC:=nC+1;
'C' : nG:=nG+1;
'G' : nT:=nT+1;
end;
end
end;
Close(f);
wA:=100*nA/n; wC:=100*nC/n; wG:=100*nG/n; wT:=100*nT/n;
Writeln('n=', n);
Writeln('A=', nA, ', ', wA, '%');
Writeln('C=', nC, ', ', wC, '%');
Writeln('G=', nG, ', ', wG, '%');
Writeln('T=', nT, ', ', wT, '%');
END.

```

---

## Часть 2. Поиск настоящих ДНК-палиндромов

4. На любом языке программирования напишите программу для поиска ДНК-палиндромов в файле генома E. Coli K-12 и найдите все палиндромы с длиной ножки от 17 до 25 пар оснований (максимальную длину петли при поиске ограничьте 8 нуклеотидами). Приложите к решению текст программы и найденные палиндромы (достаточно привести номер первого нуклеотида палиндрома, число пар нуклеотидов в ножке и число нуклеотидов в петле). (7 баллов)

Всего можно найти 6 палиндромов удовлетворяющих условию (первое число – номер первого нуклеотида палиндрома, в скобках приведены длина ножки и петли):

```

59280 GCTAAGGTTGAAGGGGC| TGGAAC |GCCCTTCAACCTTAGC (17/6)
1446340 TAACTAATTGGCGTTGCA| GTACA |TGCAACGCCAATTAGTTA (18/5)
2068389 TCCACGGACCGCACTCTT| ATGTC |AAGAGTGGGTCCGTGGA (18/5)
2192450 AAAGCCGAAATCATTTAT| |ATAAATGATTTCCGGCTTT (18/0)
2305067 ATACGCCACATCCGGCAT| ACC |ATGCCGGATGTGGCGTAT (18/3)
4520483 ATACTGTAAAGCCGGAG| ACATG |CTCCGGCTTTACAGTAT (17/5)

```

Программа, приведенная ниже, также находит меньшие палиндромы, на самом деле «перекрывающиеся» с более крупными, например:

1446340 ТААСТААТТGGCGTTGC|AGTACAT|GCAACGCCAATTAGTTA 17/7  
**1446340** ТААСТААТТGGCGTTGCA|GTACA|TGCAACGCCAATTAGTTA **18/5**  
 1446341 ААСТААТТGGCGTTGCA|GTACA|TGCAACGCCAATTAGTT 17/5

Число таких «ложных» палиндромов невелико, поэтому, чтобы не утяжелять программу, допускалось отфильтровать их вручную.

```
{Поиск ДНК палиндромов в файле coli.txt, PascalABC.NET}

{функция PAL нахождения обратной комплементарной последовательности}
function PAL (S : String) : String;
var J: Integer; Stmp: String;
begin
  Stmp:='';
  {идем с конца строки и "собираем" в Stmp обратную комплементарную строку}
  for J := 1 to length(S) do
    begin
      case S[length(S)-J+1] of
        'A' : Stmp:=Stmp+'T';
        'T' : Stmp:=Stmp+'A';
        'C' : Stmp:=Stmp+'G';
        'G' : Stmp:=Stmp+'C';
      end;
    end;
  PAL := Stmp;
end;

Var
  f: Text;
  STR, sTmp, Stem1, Stem2, Loop: String;
  char: Char;
  n, i, StemLmin, StemLmax, StemL, LoopLmin, LoopLmax, LoopL, StrL, S2Pos :
  Longint;
BEGIN

StemLmin := 17; {минимальная длина ножки}
StemLmax := 25; {максимальная длина ножки}
LoopLmin := 0; {минимальная длина петли}
LoopLmax := 8; {максимальная длина петли}

strL := 2*StemLmax+LoopLmax; {число символов в строке поиска}

Assign(f, 'coli.txt');
Reset(f);
Readln(f, sTmp); {чтобы пропустить первую служебную строку}

While (not Eof(f)) do
begin
  Read(f, char);
  {читаем символ из файла,
  если прочитанный символ - нуклеотид, обрабатываем его}
  if ( (char='A') or (char='C') or (char='G') or (char='T') ) then
  begin
    n := n+1; {счетчик прочитанных нуклеотидов}
```

```

STR := STR+char; {добавляем прочитанный нуклеотид в строку}
if length(STR)=StrL then {обрабатываем, если строка уже наполнена
символами}
begin
i := n-StrL+1; {позиция первого символа последовательности STR}

{перебираем подстроки str с размером ножки от min до max}
for StemL := StemLmin to StemLmax do
begin
Stem1 := copy(STR, 1, StemL); {берем подстроку STR от 1-го до до StemL-
го символа}
Stem2 := PAL(Stem1); {находим обратную комплементарную
последовательность}
S2Pos := pos(Stem2, STR); {ищем ее в исходной строке STR, S2Pos -
найденное положение}
LoopL := S2Pos-StemL-1; {длина петли}
Loop+ := copy(STR, StemL+1, LoopL); {нуклеотиды петли}
if (LoopL>=LoopLmin) and (LoopL<=LoopLmax) then {выводим, если длина
петли подходит}
writeln (i, ' ', Stem1, '| ', Loop, '| ', Stem2, ' (', StemL,
'/', loopL, ')');
end;

{отбрасываем первый символ STR,
чтобы начало строки на следующем шаге приходилось на следующий нуклеотид}
STR:=copy(STR,2,length(STR));
end;
end;
end;
END.

```

### Задача 10. Вложения многогранников

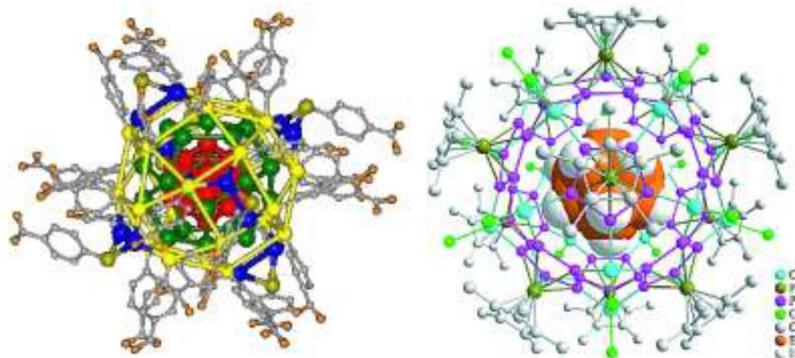


Рис. Среди нанообъектов часто можно встретить многогранники, составленные из правильных многоугольников. Иногда они вложены друг в друга как матрешка.

Для любого выпуклого многогранника справедлива теорема Эйлера:  $V - E + F = 2$ , где  $V$ ,  $E$ ,  $F$  – это, соответственно, число вершин, рёбер и граней многогранника.

1. Запишите теорему Эйлера для многогранника, составленного из правильных  $n$ -угольников, так, что в каждой вершине сходится по  $m$  ребер. Найдите все возможные многогранники, удовлетворяющие этому условию, и докажите, что иные варианты невозможны. Как называются такие многогранники все вместе и каждый по отдельности?(2 балла)

2. Пара многогранников является двойственными друг другу, если центрам граней одного соответствуют вершины другого. Из многогранников п. 1 составьте пары двойственных. Свой ответ обоснуйте.(2 балла)

3. Рассмотрим «матрешку», в которой все многогранники из п. 1 расположены друг в друге в порядке уменьшения числа вершин. Докажите, что в такой «матрешке» все многогранники можно попарно вписать друг в друга так, что все вершины внутреннего принадлежат вершинам, ребрам или граням внешнего. (3 балла)

4. Рассчитайте\*, во сколько раз ребро внешнего многогранника при этом будет отличаться от ребра самого внутреннего. (3 балла)

\*Для двух внешних многогранников «матрешки» можно использовать любые справочные формулы.

#### Решение:

1. Запишите теорему Эйлера для многогранника, составленного из правильных  $n$ -угольников, так, что в каждой вершине сходится по  $m$  ребер. Найдите все возможные многогранники, удовлетворяющие этому условию, и докажите, что иные варианты невозможны. Как называются такие многогранники все вместе и каждый по отдельности?(2 балла)

Общее число граней в таком многограннике составляет  $F_n$ , общее число ребер можно записать как

$$E = \frac{nF_n}{2}$$

(каждое ребро принадлежит двум граням), тогда число вершин равно

$$V = \frac{2}{m}E = \frac{nF_n}{m}$$

(каждому ребру принадлежит 2 вершины, но каждая вершина принадлежит  $m$  ребрам).

Тогда теорема Эйлера принимает вид:

$$\frac{nF_n}{m} - \frac{nF_n}{2} + F_n = 2 \quad \text{или} \quad 2nF_n - mnF_n + 2mF_n = 4m \quad \text{или} \quad F_n(2n - mn + 2m) = 4m$$

Преобразуя теорему Эйлера, получаем граничные условия для  $m$ :

$$F_n = \frac{4m}{2m + (2 - m)n},$$

поскольку число граней всегда положительно, то  $2m + (2 - m)n > 0$ ,

$$2m > (m - 2)n,$$

$$\frac{2m}{m - 2} > n$$

При условии  $n \geq 3$  в итоге получаем  $2m > 3m - 6$  или  $m < 6$ .

Рассмотрим все возможные пары значений  $m$  и  $n$ :

$$m = 3, F_n = \frac{12}{6 + (2-3)n} = \frac{12}{6-n}, \text{ т.е., } 3 \leq n \leq 5$$

$$\text{для } n = 3, F_3 = \frac{12}{3} = 4, E = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6, V = \frac{3 \cdot 4}{3} = 4 \text{ тетраэдр}$$

$$\text{для } n = 4, F_4 = \frac{12}{2} = 6, E = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12, V = \frac{4 \cdot 6}{3} = 8 \text{ куб}$$

$$\text{для } n = 5, F_5 = \frac{12}{1} = 12, E = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30, V = \frac{5 \cdot 12}{3} = 20 \text{ додекаэдр}$$

$$m = 4, F_n = \frac{16}{8 + (2-4)n} = \frac{16}{8-2n} = \frac{8}{4-n}, \text{ т.е., } 3 \leq n < 4$$

$$n = 3, F_3 = \frac{8}{4-3} = 8, E = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12, V = \frac{3 \cdot 8}{4} = 6 \text{ октаэдр}$$

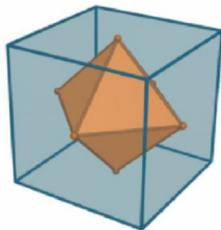
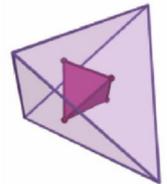
$$m = 5, F_n = \frac{20}{10 + (2-5)n} = \frac{20}{10-3n}, \text{ т.е., } 3 \leq n < 3,33$$

$$n = 3, F_3 = \frac{20}{10-9} = 20, E = \frac{3 \cdot 20}{2} = 30, V = \frac{3 \cdot 20}{5} = 12 \text{ икосаэдр}$$

Все вместе – *Платоновы тела*.

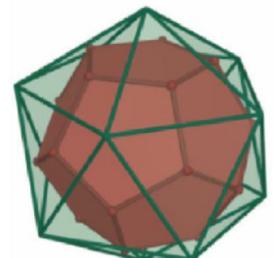
2. Пара многогранников является двойственными друг другу, если центрам граней одного соответствуют вершины другого. Из многогранников п. 1 составьте пары двойственных. Свой ответ обоснуйте.(2 балла)

Тетраэдр двойственен тетраэдру ( $F_t = V_t = 4$ ). (Многогранник, лежащий вершинами в центрах его граней также будет тетраэдром: 4 вершины, 4 треугольных грани, 6 одинаковых ребер, сходящихся под одинаковыми углами, соединяющих центры одинаковых граней «родительского» тетраэдра).



Октаэдр ( $F_o = 8, V_o = 6$ ) двойственен кубу ( $F_c = 6, V_c = 8$ ). (Соединяя точки на серединах граней куба, получаем фигуру с 6-ю вершинами, 8-ю треугольными гранями, 12-ю одинаковыми ребрами, соединяющими центры одинаковых квадратов; аналогично, соединяя точки на серединах граней октаэдра, получаем фигуру с 8-ю вершинами, 6-ю квадратными гранями, 12-ю одинаковыми ребрами, соединяющими центры одинаковых треугольников).

Икосаэдр ( $F_i = 20, V_i = 12$ ) двойственен додекаэдру ( $F_d = 12, V_d = 20$ ). (Соединяя точки на центрах граней икосаэдра, получаем фигуру с 12-ю вершинами, 20-ю пятиугольными гранями, 30-ю одинаковыми ребрами, соединяющими центры одинаковых треугольников; аналогично, соединяя точки на серединах граней додекаэдра, получаем фигуру с 20-ю вершинами, 12-ю треугольными гранями, 30-



ю одинаковыми ребрами, соединяющими центры одинаковых пятиугольников).

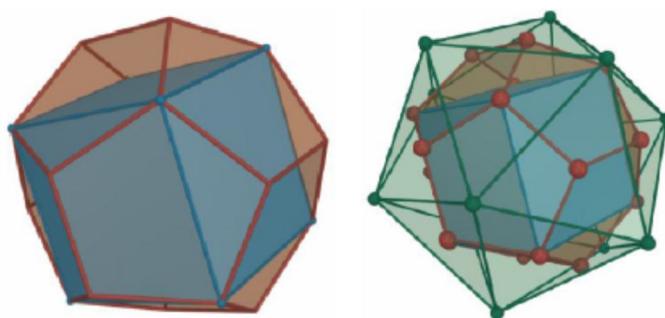
3. Рассмотрим «матрешку», в которой все многогранники из п. 1 расположены друг в друге в порядке уменьшения числа вершин. Докажите, что в такой «матрешке» все многогранники можно попарно вписать друг в друга так, что все вершины внутреннего принадлежат вершинам, ребрам или граням внешнего. (3 балла)

Матрешка (от внутренней фигуры к внешней): тетраэдр  $T$  ( $V_t = 4$ ), октаэдр  $O$  ( $V_o = 6$ ), куб  $C$  ( $V_c = 8$ ), икосаэдр  $I$  ( $V_i = 12$ ), додекаэдр  $D$  ( $V_d = 20$ ).

1)  $T$  можно разместить так, чтобы его вершины лежали в центре каждой второй грани  $O$  (что можно представить как  $T$ , вписанный в  $C$ , который затем вписан в  $O$  (как двойственный)).  $T$ , вписанный в  $C$ : соединяя каждую вторую вершину куба по диагоналям квадратных граней, получаем фигуру с четырьмя вершинами, четырьмя треугольными гранями напротив остальных четырех вершин куба и шестью одинаковыми ребрами.

2)  $O$  вписывается в  $C$  как двойственный.

3)  $C$  можно разместить так, чтобы его вершины лежали в центре 8-ми из 20-ти граней  $I$  (что можно представить как  $C$ , вписанный в  $D$ , который затем вписан  $I$ ).  $C$ , вписанный в  $D$ : проводим диагонали, соединяя две из пяти вершин пятиугольной грани додекаэдра так, что диагонали трех соседних граней сходятся по три в вершинах додекаэдра, образуя при этом фигуру с восемью вершинами и двенадцатью одинаковыми ребрами и  $(20 - 8)/2 = 6$  квадратными гранями.



4)  $I$  вписывается в  $D$  как двойственный.

4. Рассчитайте, во сколько раз ребро внешнего многогранника при этом будет отличаться от ребра самого внутреннего. (3 балла)

Примем ребро тетраэдра равным  $a$ .

1) Поскольку вершины тетраэдра лежат в центрах граней октаэдра, то радиус сферы, описанной вокруг тетраэдра

$$(R_t = \frac{\sqrt{6}}{4} a_t),$$

будет равен радиусу сферы, вписанной в октаэдр

$$(r_o = \frac{\sqrt{6}}{6} a_o).$$

Из данного равенства найдем соотношение длин ребер:

$$\frac{\sqrt{6}}{4} a_t = \frac{\sqrt{6}}{6} a_o$$

и  $a_o = 1,5 a_t = 1,5 a$

2) Поскольку вершины октаэдра лежат в центрах граней куба, то радиус сферы, описанной вокруг октаэдра

$$(R_o = \frac{\sqrt{2}}{2} a_o),$$

будет равен радиусу сферы, вписанной в куб ( $r_c = 0,5a_c$ ). Из данного равенства найдем соотношение длин ребер:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} a_o = 0,5a_c$$

или

$$a_c = \sqrt{2} a_o = \frac{3\sqrt{2}}{2} a_t = \frac{3\sqrt{2}}{2} a = 2,12a.$$

3) Поскольку вершины куба лежат в центрах граней икосаэдра, то радиус сферы, описанной вокруг куба

$$(R_c = \frac{\sqrt{3}}{2} a_c)$$

будет равен радиусу сферы, вписанной в икосаэдр

$$(r_i = \frac{3 + \sqrt{5}}{4\sqrt{3}} a_i).$$

Из данного равенства найдем соотношение длин ребер:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} a_c = \frac{3 + \sqrt{5}}{4\sqrt{3}} a_i \quad a_i = \frac{6}{3 + \sqrt{5}} a_c = \frac{9\sqrt{2}}{3 + \sqrt{5}} a_t = \frac{9\sqrt{2}}{3 + \sqrt{5}} a = 2,43a.$$

4) Поскольку вершины икосаэдра лежат в центрах граней додекаэдра, то радиус сферы, описанной вокруг икосаэдра

$$(R_i = \frac{\sqrt{2(5 + \sqrt{5})}}{4} a_i).$$

будет равен радиусу сферы, вписанной в додекаэдр

$$(r_d = \frac{1}{4} \sqrt{10 + \frac{22}{\sqrt{5}} a_d}).$$

Из данного равенства найдем соотношение длин ребер:

$$\frac{\sqrt{2(5 + \sqrt{5})}}{4} a_i = \frac{1}{4} \sqrt{10 + \frac{22}{\sqrt{5}} a_d}$$

$$a_d = \frac{\sqrt{\sqrt{5} + 1}}{\sqrt{\sqrt{5} + 2,2}} a_i = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 2,2}} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{3 + \sqrt{5}} a_t = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 2,2}} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{3 + \sqrt{5}} a = 2,08a$$

Или можно было воспользоваться справочной формулой связи длины ребра додекаэдра и вписанного в него икосаэдра:

$$a_d = \frac{10}{5 + 3\sqrt{5}} a_i = \frac{10}{5 + 3\sqrt{5}} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{3 + \sqrt{5}} a_t = \frac{10}{5 + 3\sqrt{5}} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{3 + \sqrt{5}} a = \frac{45\sqrt{2}}{15 + 7\sqrt{5}} a = 2,08a$$

Таким образом, ребро додекаэдра (внешнего многогранника «матрешки») в 2,08 раза больше ребра тетраэдра (внутреннего многогранника «матрешки»).